

第 8 章 基于三支决策的自适应粗糙集近似

8.1 引言

三支决策由拒绝、接受和不承诺决策组成,是在传统二支决策的基础上发展起来的决策理论^[1]。当信息完整且精确时,二支决策能够很好地解决实际问题。但是,二支决策并不能满足所有实际应用的需要,例如,当信息不足或部分缺失时,人们往往难以选择拒绝或接受。因此,在日常生活及许多学科及领域中,人们已经或多或少地用到了三支决策^[2-37]。例如,论文评审过程可以看成是典型的三支决策,在第 1 轮评审后,可以先筛选出能够接受的论文和拒绝的论文;其他论文既不接受也不拒绝,即暂时采用不承诺的态度,通过进一步评审,获得更多专家的评审意见,才可以最终确定论文是否被接受或拒绝^[38]。

论文评审的例子给出了三支决策在序列决策(即多阶段、多步骤决策)中所扮演的重要角色。一般来讲,不同的决策阶段基于不同的信息粒度或不同的信息量,三支决策的优点是当信息粒度太大或信息量不足时,不论接受或拒绝都显得不合理,因此可以选择不承诺。基于信息粒度的序列决策可以通过文章筛选和阅读的例子来说明。一篇文章可以用不同粒度表示,包括文章标题、章节小标题(即目录)、摘要、引言、正文和结论。文章的标题给出了所讨论的主题;章节目录给出了讨论的具体要点;摘要介绍所要讨论的内容;引言介绍了所讨论问题的背景知识和目前的研究现状;文献的结论总结了理论模型或方法、算法及今后的研究方向;文章的正文给出更多的细节。根据该粒度序列,在筛选和阅读时可以多次进行三支决策。首先,文章标题可用来判断一篇文章是否与当前研究相关;当文章标题不明确时,可以通过阅读章节目录作出判断;对于仍然无法作出判断的文章,可以进一步阅读摘要、引言、结论等。通过不同粒度上的判断,可以很大程度上减少文章选择和阅读过程所需的时间。

Yao^[39-42]提出三支决策理论,以解释粗糙集三个区域的语义。粗糙集中的正域、负域和边界域可以分别解释为满足概念的实体集、不满足概念的实体集和不承诺是否满足概念的实体集。基于粗糙集理论,本章讨论三支决策在概念形成和学习中的作用。在概念学习中,需要对实体是否满足一个概念作出评价,即该实体是否是这个概念的实例。传统二支决策在评价概念的满足性时,作出了严格的假设,即实体满足概念或不满足概念。对应于这两种情况,二支决策引入了两种决策动作,即接受和拒绝。在传统二支决策接受或拒绝决策的基础上,三支决策新增了一个不承诺决策选项。三支决策的思想可以具体解释为:当信息足够支持作出接受决策时,作出接受实体满足概念的决策;当信息足够支持作出拒绝决策时,

本章执笔人:邓晓飞,姚一豫,加拿大里贾纳大学计算机科学系王洪凯,济南大学。

作出拒绝实体满足概念的决策;当信息不充分或缺失,并不足以作出接受或拒绝决策时,可以使用不承诺决策。对于不满足概念的实体集,需要通过进一步观察,以获取更多的信息。

本章将序列三支决策引入粗糙集研究,研究了自适应粗糙集近似。与经典的粗糙集近似相比,自适应粗糙集近似在近似过程的不同阶段采用不同的等价关系,因此自适应近似不仅给出了经典的近似,还给出了该近似的结构和描述,为粗糙集近似的语义解释提供了新的研究方法。

8.2 粗糙集近似

本节介绍了信息表,信息表中的概念表示以及粗糙集的三种上、下近似表示方法,或等价的三个域的代表方法。

8.2.1 信息表

粗糙集理论模型是以信息表为基础的,信息表可以看成是一个四元组,即

$$S = (U, At, \{V_a \mid a \in At\}, \{I_a \mid a \in At\}) \quad (8.1)$$

式中: U 是有限、非空实体集; At 是有限、非空属性集; V_a 是属性 a 的非空属性值集合,可以看成是属性 a 的值域; $I_a: U \rightarrow V_a$ 是信息函数,将 U 中的每一个实体映射到 V_a 上的一个值。在信息表的基础上可以定义一个等价关系,即一个自反的、对称的和传递的二元关系。设 $P \subseteq At$ 是属性集 At 的一个子集, U 上的等价关系 E_P 可以定义为

$$xE_Py \Leftrightarrow \forall a \in P (I_a(x) = I_a(y)) \quad (8.2)$$

实体 x 和 y 在属性集 P 上的所有对应的属性值相等。等价关系 E_P 给出了对实体集 U 的一个划分,记为 $U/E_P = \{[x]_{E_P} \mid x \in U\}$, U/E_P , 又称为商集,商集可以看成是等价关系 E_P 所对应的等价类的集合。其中, $[x]_{E_P} = \{y \in U \mid xE_Py\}$ 表示包含 x 的关于等价关系 E_P 的等价类,简记为 $[x]_P$ 或 $[x]$ 。

例 8.1 表 8.1 是一个信息表,实体集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 属性集 $At = \{\text{Height}, \text{Hair}, \text{Eyes}, \text{Class}\}$ 。给定一属性集 At 的子集 $P = \{\text{Height}, \text{Hair}, \text{Eyes}\}$, 它定义了一个等价关系 E_P , 其所对应的商集可以表示为 $U/E_P = \{\{1\}, \{2, 8\}, \{3\}, \{4, 5\}, \{6\}, \{7\}\}$ 。

表 8.1 一个信息表

Object	Height	Hair	Eyes	Class
1	short	blond	blue	+
2	short	blond	brown	-
3	tall	red	blue	+
4	tall	dark	blue	-

(续表)

Object	Height	Hair	Eyes	Class
5	tall	dark	blue	-
6	tall	blond	blue	+
7	tall	dark	brown	-
8	short	blond	brown	-

8.2.2 信息表中的可定义集

粗糙集理论最重要的应用之一是概念学习。概念是人类思考的基本单元,人们需要通过概念来共享信息、交流思想。在认知科学中,关于概念有许多理论,例如概念的系统观点、经典观点等^[43-45]。概念的经典观点认为,概念是由一个二元组表示的,即内涵和外延。内涵描述概念的本质属性,根据该描述可以判断实体是否属于概念;外延是概念的实例集。概念学习可采用概念的经典观点^[45,46]。

概念的内涵可以通过信息表中的属性和对应的属性值来描述,也就是说可以用公式来描述概念。在一个信息表中,一个决策逻辑语言可定义如下^[46]:

- ① 原子公式 $a=v$, 其中 a 是属性, v 是属性 a 的一个值;
- ② 如果 p 和 q 是两个公式, 那么 $p \wedge q$ 和 $p \vee q$ 也是公式。

该语言仅考虑逻辑合取和析取,是 Pawlak 决策逻辑语言的一个子集^[47],但对一个信息表来说,它和 Pawlak 决策逻辑语言有同样的描述能力。原子公式也被称为描述项或属性-属性值对。一个公式表示一个概念的内涵,该概念的外延由满足该公式的所有实体组成,其定义如下^[47]:

$$\begin{aligned} m(a=v) &= \{x \in U \mid I_a(x) = v\} \\ m(p \wedge q) &= m(p) \cap m(q) \\ m(p \vee q) &= m(p) \cup m(q) \end{aligned}$$

通常,我们也考虑由一个属性子集定义的逻辑语言。在信息表中,一个实体可以用逻辑语言的公式表示为 $des_P(x) = (\bigwedge_{a \in P} I_a(x) = v)$, 其中 $P \subseteq At$ 是属性集的一个子集。一个等价类 $[x]_P$ 的所有元素具有相同的描述公式,因此 x 的描述也是 $[x]_P$ 的描述,记为 $des_P([x]_P)$ 。

实体集 U 的一个子集 $C \subseteq U$ 可解释为一个概念的外延。如果能够找到一个公式 p 使得 $m(p) = C$, 那么 C 称为可定义集;反之,称之为不可定义集。一个可定义集可以表示为若干个等价类的并。

例 8.2 在信息表 8.1 中,实体集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 属性集的子集 $P = \{\text{Height}, \text{Hair}\}$, 集合 $C_1 = \{1, 2, 8\} \subseteq U$ 和集合 $C_2 = \{2, 4, 5, 7, 8\} \subseteq U$ 是实体集 U 的子集。因为 C_1 可以通过公式 $des_P(C_1) = \{\text{Height} = \text{short} \wedge \text{Hair} = \text{blond}\}$ 描述,因此 C_1 是可定义集;但对于集合 C_2 , 找不到一个合适的可以描述该集合所有实体的公式,因此 C_2 是不可定义集。

8.2.3 Pawlak 近似

设集合 $C \subseteq U$ 表示一个概念的外延, $P \subseteq At$ 是属性集 At 的子集,等价类 $[x]_P$ 可以用公

式 $des_P(x)$ 描述, 因此商集 U/E_P 是可定义概念的一个集合。Pawlak 提出概念 C 可以通过商集中的可定义概念来表示, C 的下近似和上近似分别定义为

$$\begin{aligned} \underline{apr}(C) &= \bigcup \{K \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq C\} \\ \overline{apr}(C) &= \bigcup \{K \mid K \in U/E_P \wedge (K \cap C \neq \emptyset)\} \\ &= \bigcup \{K \mid K \in U/E_P \wedge \neg(K \subseteq C^c)\} \end{aligned} \quad (8.3)$$

式中, 集合 C 的下近似和上近似都是实体集 U 的子集, 即 $\underline{apr}(C), \overline{apr}(C) \subseteq U$ 。粗糙集上、下近似也可以等价地表示为集合 C 的正域、负域和边界域, 它们可以分别定义为

$$\begin{aligned} POS(C) &= \underline{apr}(C) = \bigcup \{K \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq C\} \\ NEG(C) &= (\overline{apr}(C))^c = U - \overline{apr}(C) = \bigcup \{K \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq C^c\} \\ BND(C) &= (POS(C) \cup NEG(C))^c \\ &= \bigcup \{K \mid K \in U/E_P \wedge \neg(K \subseteq C) \wedge \neg(K \subseteq C^c)\} \end{aligned} \quad (8.4)$$

这三个区域都是 U 的子集, 即 $POS(C), NEG(C), BND(C) \subseteq U$ 。

例 8.3 在表 8.1 所示的信息表中, 考虑属性集的子集 $P = \{\text{Height}, \text{Hair}\}$ 。根据等价关系 E_P , 商集 $U/E_P = \{\{1, 2, 8\}, \{3\}, \{4, 5, 7\}, \{6\}\}$, 概念 $C = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ 的下近似和上近似分别为

$$\begin{aligned} \underline{apr}(C) &= \bigcup \{\{4, 5, 7\}\} = \{4, 5, 7\} \\ \overline{apr}(C) &= \bigcup \{\{1, 2, 8\}, \{4, 5, 7\}\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \end{aligned}$$

下近似 $\underline{apr}(C) = \{4, 5, 7\}$ 是实体集 U 的子集, 同样, 上近似 $\overline{apr}(C) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ 也是 U 的子集。这两个集合都是由实体集 U 中的实体构成的, 但是集合本身都不显式包含构成上、下近似的等价类的信息, 即 Pawlak 粗糙集上、下近似不显式包含结构信息。根据上、下近似, 粗糙集三个区域分别为

$$\begin{aligned} POS(C) &= \{4, 5, 7\} \\ NEG(C) &= U - \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{3, 6\} \\ BND(C) &= U - (\{4, 5, 7\} \cup \{3, 6\}) = \{1, 2, 8\} \end{aligned}$$

这三个域不显式包含结构信息。

8.2.4 含结构信息的近似

根据 Pawlak 上、下近似的定义, Bryniarski 等^[48]提出了含结构的上、下近似, 它保留了结构信息。这种定义方便了规则的获取, 也便于分析、研究和评价规则。Bryniarski、Dubois 和 Prade 等^[48, 49]提出了关于集合的上、下近似定义:

$$\begin{aligned} \underline{sapr}(C) &= \{K \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq C\} \\ \overline{sapr}(C) &= \{K \mid K \in U/E_P \wedge \neg(K \subseteq C^c)\} \end{aligned} \quad (8.5)$$

集合 C 的下近似和上近似都是商集 U/E_P 的子集, 即 $\underline{sapr}(C), \overline{sapr}(C) \subseteq U/E_P$ 。该

定义的优点是显式保留了上、下近似所包含的等价类的信息,即结构信息。等价的三个区域分别为

$$\begin{aligned} SPOS(C) &= \underline{sapr}(C) = \{K \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq C\} \\ SNEG(C) &= (\overline{sapr}(C))^c = U/E_P - \overline{sapr}(C) = \{K \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq C^c\} \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} SBND(C) &= (SPOS(C) \cup SNEG(C))^c \\ &= \{K \mid K \in U/E_P \wedge \neg(K \subseteq C) \wedge \neg(K \subseteq C^c)\} \end{aligned}$$

通过集合并运算和 Pawlak 上、下近似的定义,可以从 Bryniarski 等提出的上、下近似定义得到:

$$\begin{aligned} \underline{apr}(C) &= \cup \underline{sapr}(C) \\ \overline{apr}(C) &= \cup \overline{sapr}(C) \end{aligned} \quad (8.7)$$

反之, Bryniarski 等提出的上、下近似定义也可以从 Pawlak 上、下近似的定义推导出来:

$$\begin{aligned} \underline{sapr}(C) &= \{K \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq \underline{apr}(C)\} \\ \overline{sapr}(C) &= \{K \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq \overline{apr}(C)\} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Yao^[50] 比较了这两种定义的优缺点,并给出了带结构定义的相关语义解释。

例 8.4 在表 8.1 所示的信息表中,属性集的子集 $P = \{\text{Height}, \text{Hair}\}$, 对应的商集为 $U/E_P = \{\{1,2,8\}, \{3\}, \{4,5,7\}, \{6\}\}$, 概念 $C = \{2,4,5,7,8\}$ 的下近似 $\underline{sapr}(C)$ 和上近似 $\overline{sapr}(C)$ 分别为

$$\begin{aligned} \underline{sapr}(C) &= \{\{4,5,7\}\} \\ \overline{sapr}(C) &= \{\{1,2,8\}, \{4,5,7\}\} \end{aligned}$$

对 $\underline{sapr}(C)$ 和 $\overline{sapr}(C)$ 中的元素进行集合并运算,得到:

$$\begin{aligned} \underline{apr}(C) &= \cup \underline{sapr}(C) = \cup \{\{4,5,7\}\} = \{4,5,7\} \\ \overline{apr}(C) &= \cup \overline{sapr}(C) = \cup \{\{1,2,8\}, \{4,5,7\}\} = \{1,2,4,5,7,8\} \end{aligned}$$

由商集 U/E_P , $\underline{apr}(C)$ 和 $\overline{apr}(C)$, 也可以推导出 $\underline{sapr}(C)$ 和 $\overline{sapr}(C)$ 。等价类 $\{4,5,7\} \in U/E_P$ 且 $\{4,5,7\} \subseteq \underline{apr}(C)$, 那么 $\underline{sapr}(C) = \{\{4,5,7\}\}$; 等价类 $\{1,2,8\}, \{4,5,7\} \in U/E_P$ 且 $\{1,2,8\}, \{4,5,7\} \subseteq \overline{apr}(C)$, 那么 $\overline{sapr}(C) = \{\{1,2,8\}, \{4,5,7\}\}$ 。相应的,集合 C 的三个区域分别为

$$\begin{aligned} SPOS(C) &= \{\{4,5,7\}\} \\ SNEG(C) &= \{\{3\}, \{6\}\} \\ SBND(C) &= U/E_P - \{\{4,5,7\}\} - \{\{3\}, \{6\}\} = \{\{1,2,8\}\} \end{aligned}$$

它们显式给出了三个区域的结构信息。

8.2.5 含描述信息的近似

含结构信息的粗糙集上、下近似,虽然引入了结构,但并没有给出所用到的概念的内涵。

借鉴于形式概念格研究^[51-54],本节引入含描述的定义,这既方便了描述规则,又方便了获取、分析和评价规则。在该定义中,每个等价类表示成由描述公式和实体集(对应的等价类)所构成的二元对,每个二元对都是一个可定义概念。

设 $P \subseteq At$ 是属性集的子集,实体 x 用公式 $des_p(x) = des_p(K)$ 描述,其中等价类 $K = [x]_P \in U/E_P$,是与实体有相同描述的非空实体集,那么实体 x 在等价关系 E_P 上的等价类可以表示为一个二元组

$$(des_p(K), K)$$

该二元组可以看成是一个可定义概念,内涵用公式 $des_p(x)$ 来描述,外延用等价类 $K = [x]_P$ 表示。

Pawlak 上、下近似可以等价地表示为

$$\begin{aligned} \underline{dapr}(C) &= \{(des_p(K), K) \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq C\} \\ \overline{dapr}(C) &= \{(des_p(K), K) \mid K \in U/E_P \wedge \neg(K \subseteq C^c)\} \end{aligned} \quad (8.9)$$

相应的,概念 C 的三个区域分别为

$$\begin{aligned} DPOS(C) &= \{(des_p(K), K) \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq C\} \\ DNEG(C) &= \{(des_p(K), K) \mid K \in U/E_P \wedge K \subseteq C^c\} \\ DBND(C) &= \{(des_p(K), K) \mid K \in U/E_P \wedge \neg(K \subseteq C) \wedge \neg(K \subseteq C^c)\} \end{aligned} \quad (8.10)$$

例 8.5 在表 8.1 所示的信息表中,考虑属性集的子集 $P = \{\text{Height}, \text{Hair}\}$ 。给定一概念 $C = \{2, 4, 5, 7, 8\}$,商集 U/E_P 所对应的可定义概念表示为

$$\begin{aligned} &\{(\text{Height} = \text{short} \wedge \text{Hair} = \text{blond}, \{1, 2, 8\}), (\text{Height} = \text{tall} \wedge \text{Hair} = \text{red}, \{3\}), \\ &(\text{Height} = \text{tall} \wedge \text{Hair} = \text{dark}, \{4, 5, 7\}), (\text{Height} = \text{tall} \wedge \text{Hair} = \text{blond}, \{6\})\} \end{aligned}$$

C 的下近似和上近似可以分别表示为

$$\begin{aligned} \underline{dapr}(C) &= \{(\text{Height} = \text{tall} \wedge \text{Hair} = \text{dark}, \{4, 5, 7\})\} \\ \overline{dapr}(C) &= \{(\text{Height} = \text{short} \wedge \text{Hair} = \text{blond}, \{1, 2, 8\}), (\text{Height} = \text{tall} \wedge \text{Hair} = \text{dark}, \{4, 5, 7\})\} \end{aligned}$$

相应的, C 的三个区域可以分别表示为

$$\begin{aligned} DPOS(C) &= \{(\text{Height} = \text{tall} \wedge \text{Hair} = \text{dark}, \{4, 5, 7\})\} \\ DNEG(C) &= \{(\text{Height} = \text{tall} \wedge \text{Hair} = \text{red}, \{3\}), (\text{Height} = \text{tall} \wedge \text{Hair} = \text{blond}, \{6\})\} \\ DBND(C) &= \{(\text{Height} = \text{short} \wedge \text{Hair} = \text{blond}, \{1, 2, 8\})\} \end{aligned}$$

可以看出,含描述信息的粗糙集上、下近似,及其所对应的三个区域更直观地表示了规则学习的过程。

8.3 基于三支决策的自适应粗糙集近似

第 2 部分介绍了三种粗糙集上、下近似的定义及其所对应的三个区域,但是这三种上、

下近似都使用了固定的等价关系,即根据该等价关系生成的等价类的粒度是不变的。用固定粒度的等价类来近似概念,使得近似过程缺乏灵活性、准确性,并且有可能需要较细的信息粒度或较多的信息量。以本章含描述信息的粗糙集上、下近似定义为基础,给出基于序列决策的概念的近似,在每一步决策中使用三支决策,实现了自适应的概念近似过程。

图 8.1 表示了基于序列决策的三支决策的自适应概念近似过程。设集合 $C \subseteq U$ 是实体集 U 的子集,属性集 $At = \{a_1, a_2, a_3\}$,在图 8.1 的序列决策过程中,每次决策增加一个属性,不妨设

$$P_0 = \emptyset, P_1 = \{a_1\}, P_2 = \{a_1, a_2\}, P_3 = \{a_1, a_2, a_3\} \subseteq At$$

图 8.1(a~d)表示了基于序列决策的三支决策的自适应概念近似过程,等价关系所对应等价类的粒度逐渐变细,这可以看成是多步三支决策所需要的信息粒度逐渐变细。等价类的构造可以通过一个属性评估函数 δ 实现。根据基于信息表的等价关系的定义,如果属性集子集 $P, Q \subseteq At$ 满足 $\emptyset \neq P \subseteq Q$,则等价关系满足 $E_Q \subseteq E_P, U/E_Q \subseteq U/E_P$ 表示商集 U/E_P 中的等价类粒度较粗,而商集 U/E_Q 中的等价类粒度较细。图 8.1(b~d)所使用的等价关系及商集分别具有以下关系:

$$E_{P_3} \subseteq E_{P_2} \subseteq E_{P_1}$$

$$U/E_{P_3} \subseteq U/E_{P_2} \subseteq U/E_{P_1}$$

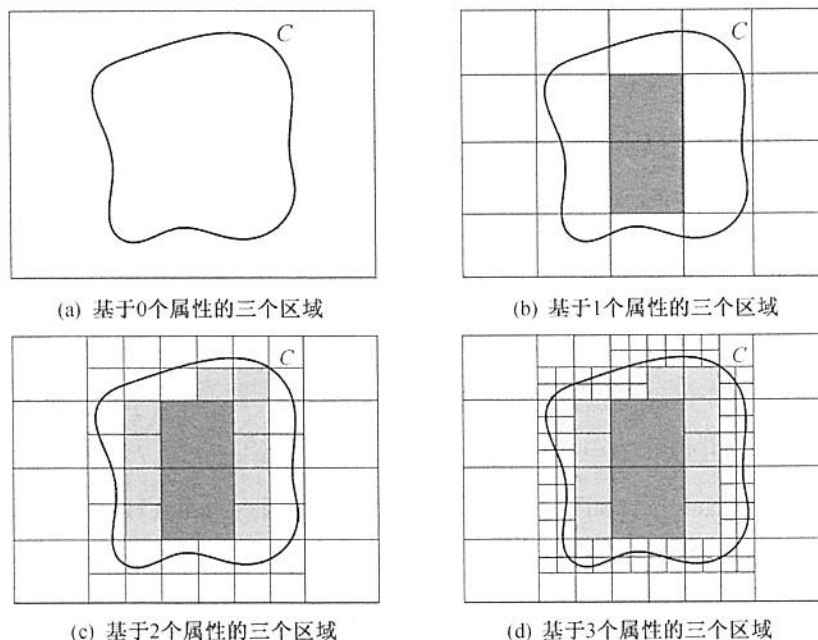


图 8.1 基于三支决策的自适应概念近似

图 8.1(b~d)所对应的商集中的等价类的粒度是由粗到细逐渐减小的。

对于图 8.1(a),由于属性集的子集 $P_0 = \emptyset$ 为空集,因此第 0 步三支决策的结果是正、负域都为空,而边界域等于实体集 U ,即

$$TPOS_0(C) = \emptyset, TNEG_0(C) = \emptyset, TBND_0(C) = U$$

剩余的未经过决策的实体集合是 $U_2 = TBND_0(C) = U$ 。

在第 0 步三支决策的基础上,图 8.1(b)进行第 1 步三支决策。根据属性评估函数,选取一个合适的属性,不妨设得到属性 $P_1 = \{a_1\}$ 集。在实体集 U_1 上对集合 C 进行三支决策,图 8.1(b)中阴影部分为正域,其余部分为负域和边界域,分别表示为

$$TPOS_1(C) = TPOS_0(C) \cup \{(des_{P_1}(C), K) \mid K \in U_2/E_{P_1} \wedge K \subseteq C\}$$

$$TNEG_1(C) = TNEG_0(C) \cup \{(des_{P_1}(C), K) \mid K \in U_2/E_{P_1} \wedge K \subseteq C^c\}$$

$$TBND_1(C) = \{(des_{P_1}(C), K) \mid K \in U_1/E_{P_1} \wedge \neg(K \subseteq C) \wedge \neg(K \subseteq C^c)\}$$

图 8.1(b) 所对应的第 1 步三支决策,实际上是对图 8.1(a)第 0 步三支决策所得边界域 $TBND_0(C)$ 的进一步三支决策,并计算出三个区域。

类似地,图 8.1(c)对应的在剩余的实体集 $U_2 = TBND_1(C)$ 上对集合 C 进行第 2 步三支决策,图中正域表示为灰色粗粒度的等价类 ($TPOS_2(C)$) 和淡灰色细粒度等价类 ($\{(des_{P_2}(C), K) \mid K \in U_2/E_{P_2} \wedge K \subseteq C\}$) 的集合;图 8.1(d) 则对应第 3 步三支决策,由于遍历了所有的属性,自适应过程终止。当然,自适应过程终止的另一个条件是当前三支决策所得的边界域为空集。自适应三支决策最终所得到的三个区域是

$$TPOS_3(C) = TPOS_2(C) \cup \{(des_{P_3}(C), K) \mid K \in U_3/E_{P_3} \wedge K \subseteq C\}$$

$$TNEG_3(C) = TNEG_2(C) \cup \{(des_{P_3}(C), K) \mid K \in U_3/E_{P_3} \wedge K \subseteq C^c\}$$

$$TBND_3(C) = \{(des_{P_3}(C), K) \mid K \in U_3/E_{P_3} \wedge \neg(K \subseteq C) \wedge \neg(K \subseteq C^c)\}$$

该结果包含描述信息和结构信息,以便于规则学习、分析和评价。根据三个区域可以得到概念 C 的自适应上、下近似:

$$\underline{apr}(C) = TPOS_3(C)$$

$$\overline{apr}(C) = TPOS_3(C) \cup TBND_3(C)$$

图 8.1 所描述的自适应三支决策过程可以通过算法 8.1 进行描述。在算法 8.1 的自适应三支决策过程中,通过使用属性评价函数 δ ,构造了一个等价关系的序列。设根据属性 P_i 构造的等价关系简记为 $E_i = E_{P_i}$,该等价关系序列可以表示为

$$E_n \subseteq E_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq E_2 \subseteq E_1$$

其中对应的属性序列 $P_i \subseteq P_{i+1} \subseteq At, 1 \leq i \leq n-1$ 。该序列对应的商集具有如下关系:

$$U/E_{P_n} \subseteq U/E_{P_{n-1}} \subseteq \cdots \subseteq U/E_{P_2} \subseteq U/E_{P_1}$$

这表明第 $i+1$ 步三支决策比第 i 步三支决策所使用的商集具有更细的粒度。需要指出的是,在第 $i+1$ 步,只需要对第 i 步中得到的边界域作进一步决策。

基于序列三支决策的自适应计算粗糙集三个域的过程可以通过算法 8.1 实现,该算法的主要思想同经典的 ID3 算法^[55]和 Qian 等给出的加速器算法^[56]的思想类似。

算法 8.1 自适应粗糙集近似的构造算法

输入: 信息表 $S = (U, At, \{V_a \mid a \in At\}, \{I_a \mid a \in At\})$, 属性集 At 含有 n 个属性;概念 $C \subseteq U$;属性评价函数 δ 。

输出: $TPOS(C), TNEG(C), TBND(C)$ 。

开始

$$TPOS_0(C) = \emptyset, TNEG_0(C) = \emptyset, TBND_0(C) = \{U\};$$

$$i = 1;$$

开始循环, 如果 $1 \leq i \leq n \wedge TBND_{i-1}(C) \neq \emptyset$, 则执行:

$$U_i = \bigcup TBND_{(i-1)}(C);$$

根据评价函数选择合适的属性, 构造属性集子集 $P_i (P_{i-1} \subseteq P_i)$, U_i 上的等价关系 $E_i = E_{P_i}$;

$$TPOS_i(C) = TPOS_{i-1}(C) \cup \{(des_P(K), K) \mid K \in U_i/E_i \wedge K \subseteq C\};$$

$$TNEG_i(C) = TNEG_{i-1}(C) \cup \{(des_P(K), K) \mid K \in U_i/E_i \wedge K \subseteq C\};$$

$$TBND_i(C) = \{(des_P(K), K) \mid K \in U_i/E_i \wedge \neg(K \subseteq C) \wedge \neg(K \subseteq C^c)\};$$

$$i = i + 1;$$

结束循环;

$$TPOS(C) = TPOS_i(C), TNEG(C) = TNEG_i(C), TBND(C) = TBND_i(C);$$

结束

例 8.6 在表 8.1 所示的信息表中, 考虑概念 $C = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ 的自适应粗糙集三个域的构造。设 δ 是一个属性评价函数, 通过 δ 可以选取每次进行三支决策所需要的属性集子集, 从而构造对应的等价关系。根据算法 8.1, 自适应近似概念 C 的具体计算过程如下:

第 0 步 $P_0 = \emptyset$, 在 U 上对概念 C 近似得到:

$$TPOS_0(C) = \emptyset, TNEG_0(C) = \emptyset, TBND_0(C) = \{U\}$$

第 1 步 $P_1 = \{\text{Hair}\}$, 在 $U_1 = TBND_0(C) = U$ 上对概念 C 近似。根据等价关系 E_{P_1} , 商集 U_1/E_{P_1} 对应的概念可以表示为

$$\{(\text{Hair} = \text{blond}, \{1, 2, 6, 8\}), (\text{Hair} = \text{dark}, \{4, 5, 7\}), (\text{Hair} = \text{red}, \{3\})\}$$

概念 C 的三个区域分别为

$$TPOS_1(C) = \emptyset \cup \{(\text{Hair} = \text{dark}, \{4, 5, 7\})\} = \{(\text{Hair} = \text{dark}, \{4, 5, 7\})\}$$

$$TNEG_1(C) = \emptyset \cup \{(\text{Hair} = \text{red}, \{3\})\} = \{(\text{Hair} = \text{red}, \{3\})\}$$

$$TBND_1(C) = \{(\text{Hair} = \text{blond}, \{1, 2, 6, 8\})\}$$

第 2 步 $P_2 = \{\text{Hair}, \text{Eyes}\}$, 在 $U_2 = TBND_1(C)$ 上对概念 C 近似。根据等价关系 E_{P_2} , 商集 U_2/E_{P_2} 对应的概念可以表示为

$$\{(\text{Hair} = \text{blond} \wedge \text{Eyes} = \text{blue}, \{1, 6\}), (\text{Hair} = \text{blond} \wedge \text{Eyes} = \text{brown}, \{2, 8\})\}$$

概念 C 的三个区域分别为

$$\begin{aligned} TPOS_2(C) &= \{(\text{Hair} = \text{dark}, \{4, 5, 7\})\} \cup \{(\text{Hair} = \text{blond} \wedge \text{Eyes} = \text{brown}, \{2, 8\})\} \\ &= \{(\text{Hair} = \text{dark}, \{4, 5, 7\}), (\text{Hair} = \text{blond} \wedge \text{Eyes} = \text{brown}, \{2, 8\})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TNEG_2(C) &= \{(\text{Hair} = \text{red}, \{3\})\} \cup \{(\text{Hair} = \text{blond} \wedge \text{Eyes} = \text{blue}, \{1, 6\})\} \\ &= \{(\text{Hair} = \text{red}, \{3\}), (\text{Hair} = \text{blond} \wedge \text{Eyes} = \text{blue}, \{1, 6\})\} \end{aligned}$$

$$TBND_2(C) = \emptyset$$

第 2 步决策后, $TBND_2(C) = \emptyset$, 即 $TBND_2(C)$ 中没有未被决策的实体, 算法终止。概念 C 的下近似和上近似可以分别表示为

$$\begin{aligned} \underline{dapr}(C) &= TPOS_2(C) \\ &= \{(\text{Hair}=\text{dark}, \{4, 5, 7\}), (\text{Hair}=\text{blond} \wedge \text{Eyes}=\text{brown}, \{2, 8\})\} \\ \overline{dapr}(C) &= \underline{dapr}(C) \cup TBND_2(C) \\ &= \underline{dapr}(C) \cup \emptyset \\ &= \{(\text{Hair}=\text{dark}, \{4, 5, 7\}), (\text{Hair}=\text{blond} \wedge \text{Eyes}=\text{brown}, \{2, 8\})\} \end{aligned}$$

在这个例子中, 虽然一共有 3 个属性, 但是利用自适应粗糙集上、下近似算法, 最终只利用 2 个属性就实现了对概念 C 中所有元素的分类。

8.4 结 论

在 Pawlak 粗糙集上、下近似定义和 Bryniarski 等提出的含结构信息的上、下近似定义基础上, 本章给出了含描述信息的上、下近似定义。在该定义中, 用一个二元对表示概念的内涵和外延, 这个二元对包含了等价类及其相应的描述公式。因此, 含描述信息的定义既包含了结构信息又包含了描述信息。以这种定义为基础, 本章进一步讨论了基于序列决策的三支决策的自适应粗糙集近似的构造方法。自适应近似方法, 是在决策的不同阶段使用不同的等价关系, 即使用具有不同的粒度的商集进行概念近似。这种方法的一个优点是, 考虑到不同的决策阶段所需要的信息量或信息粒度不一样, 可以根据一个给定的评价函数自动选取需要使用的等价关系, 即在每个决策阶段都使用合适粒度的信息粒; 另一个优点是, 自适应方法采用了带描述信息的表示方法, 因此更方便了规则的学习、分析和评价。

参考文献

- [1] Yao Y Y. An outline of a theory of three-way decisions[C]// Proceedings of the 8th International RSCTC Conference. 2012.
- [2] Azam N, Yao J T. Multiple criteria decision analysis with game-theoretic rough sets[C]// Proceedings of the 8th International RSCTC Conference. 2012.
- [3] Grzymala-Busse J W. Generalized parameterized approximations [C]// Proceedings of the 6th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. 2011, LNCS (LNAD) 6954: 136 - 145.
- [4] Grzymala-Busse J W, Yao Y Y. Probabilistic rule induction with the LERS data mining system [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2011, 26: 518 - 539.
- [5] Herbert J P, Yao J T. Learning optimal parameters in decision-theoretic rough sets [C]// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2009. 2009, LNCS (LNAD) 5589: 610 - 617.
- [6] Herbert J P, Yao J T. Game-theoretic rough sets [J]. Fundamenta Informaticae, 2011, 108: 267 - 286.
- [7] Jia X Y, Li W W, Shang L, et al. An optimization viewpoint of decision-theoretic rough set model

- [C]// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011. 2011, LNCS (LNAI) 6954: 457 - 465.
- [8] Jia X Y, Zhang K, Shang L. Three-way decisions solution to filter spam email: An empirical study [C]// Proceedings of the 8th International RSCTC Conference. 2012.
- [9] Li H X, Zhou X Z. Risk decision making based on decision-theoretic rough set: A three-way view decision model[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2011, 4: 1 - 11.
- [10] Li H X, Zhou X Z, Zhao J B, et al. Cost-sensitive classification based on decision-theoretic rough set model[C]// Proceedings of the 8th International RSCTC Conference. 2012.
- [11] Li H X, Zhou X Z, Zhao J B, et al. Attribute reduction in decision-theoretic rough set model: A further investigation[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011. 2011, LNCS (LNAI) 6954: 466 - 475.
- [12] Li W, Miao D Q, Wang W L, et al. Hierarchical rough decision theoretic framework for text classification[C]// Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Cognitive Informatics. 2010.
- [13] Li Y F, Zhang C Q, Swanb J R. Rough set based model in information retrieval and filtering [C]// Proceedings of the 5th International Conference on Information Systems Analysis and Synthesis. 1999.
- [14] Li Y F, Zhang C Q, Swanb J R. An information filtering on the Web and its application in JobAgent[J]. Knowledge-based Systems, 2000, 13: 285 - 296.
- [15] Lingras P, Chen M, Miao D Q. Rough multi-category decision theoretic framework [C]// Proceedings of the 3rd International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2008. 2008, LNCS (LNAI) 5009: 676 - 683.
- [16] Lingras P, Chen M, Miao D Q. Semi-supervised rough cost/benefit decisions [J]. Fundamenta Informaticae, 2009, 94: 233 - 244.
- [17] Lingras P, Chen M, Miao D Q. Rough cluster quality index based on decision theory[J]. IEEE Transaction on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21: 1014 - 1026.
- [18] Liu D, Li H X, Zhou X Z. Two decades' research on decision-theoretic rough sets [C]// Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Cognitive Informatics. 2010.
- [19] Liu D, Li T R, Li H X. A multiple-category classification approach with decision-theoretic rough sets[J]. Fundamenta Informaticae, 2012, 115: 173 - 188.
- [20] Liu D, Li T R, Liang D C. A new discriminant analysis approach under decision-theoretic rough sets [C]// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011. 2011, LNCS (LNAI) 6954: 476 - 485.
- [21] Liu D, Li T R, Liang D C. Decision-theoretic rough sets with probabilistic distribution [C]// Proceedings of the 8th International RSCTC Conference. 2012.
- [22] Liu D, Li T R, Ruan D. Probabilistic model criteria with decision-theoretic rough sets [J]. Information Sciences, 2011, 181: 3709 - 3722.
- [23] Liu D, Yao Y Y, Li T R. Three-way investment decisions with decision-theoretic rough sets [J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2011, 4: 66 - 74.
- [24] Liu J B, Min F, Liao S J, et al. Minimal test cost feature selection with positive region constraint [C]// Proceedings of the 8th International RSCTC Conference. 2012.
- [25] Ma X A, Wang G Y, Yu H. Multiple-category attribute reduct using decision-theoretic rough set model [C]// Proceedings of the 8th International RSCTC Conference. 2012.
- [26] Yang X P, Song H G, Li T J. Decision making in incomplete information system based on

decision-theoretic rough sets[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011. 2011, LNCS (LNAI) 6954: 495 - 503.

[27] Yang X P, Yao J T. Modelling multi-agent three-way decisions with decision theoretic rough sets [J]. Fundamenta Informaticae, 2012, 115: 157 - 171.

[28] Yu H, Chu S S, Yang D C. Autonomous knowledge-oriented clustering using decision-theoretic rough set theory[J]. Fundamenta Informaticae, 2012, 115: 141 - 156.

[29] Yu H, Liu Z G, Wang G Y. Automatically determining the number of clusters using decision-theoretic rough set[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011. 2011, LNCS (LNAI) 6954: 504 - 513.

[30] Yu H, Wang Y. Three-way decisions method for overlapping clustering[C]// Proceedings of the 8th International RSCTC Conference. 2012.

[31] Zhou B. A new formulation of multi-category decision-theoretic rough sets[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011. 2011, LNCS (LNAI) 6954: 514 - 522.

[32] Zhou B, Yao Y Y, Luo J G. A three-way decision approach to email spam filtering[C]// Proceedings of the 23rd Canadian Conference on Advances in Artificial Intelligence, AI2010. 2010, LNCS (LNAI) 6085: 28 - 39.

[33] Zhou X Z, Li H X. A multi-view decision model based on decision-theoretic rough set[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2009. 2009, LNCS (LNAI) 5589: 650 - 657.

[34] Yao Y Y, Deng X F. Sequential three-way decisions with probabilistic rough sets [C]// Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Cognitive Informatics & Cognitive Computing. 2011.

[35] 贾修一, 李伟漳, 商琳, 等. 一种自适应求三支决策中决策阈值的算法[J]. 电子学报, 2011, 39: 2520 - 2525.

[36] 贾修一, 商琳. 一种求三支决策阈值的模拟退火算法, 2012, 手稿.

[37] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[38] Weller A C. Editorial peer review: Its strengths and weaknesses[M]. Medford, NJ: Information Today, Inc., 2001.

[39] Yao Y Y. Three-way decision: An interpretation of rules in rough set theory[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2009. 2009, LNCS (LNAI) 5589: 642 - 649.

[40] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180: 341 - 353.

[41] Yao Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models [J]. Information Sciences, 2011, 181: 1080 - 1096.

[42] Yao Y Y. Two semantic issues in a probabilistic rough set model[J]. Fundamenta Informaticae, 2011, 108: 249 - 265.

[43] Goldstone R L, Kersten A. Concepts and categorization[C]// Healy A F, Proctor R W, eds. Comprehensive Handbook of Psychology, Volume 4: Experimental Psychology. New Jersey: Wiley, 2003: 591 - 621.

[44] Medin D L, Smith E E. Concepts and concept formation[J]. Annual Review of Psychology, 1984, 35: 113 - 138.

- [45] Mechelen I V, Hampton J, Michalski R S, et al. Categories and concepts, theoretical views and inductive data analysis[M]. New York: Academic Press, 1993.
- [46] Yao Y Y, Deng X F. A granular computing paradigm for concept learning[C]// Ramanna S, Jain L C, Howlett R J, eds. Emerging Paradigms in Machine Learning. Berlin: Springer, 2012: 307 - 326.
- [47] Pawlak Z. Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [48] Bryniarski E. A calculus of rough sets of the first order[J]. Bulletin of the Polish Academy of Science, Mathematics, 1989, 16: 71 - 78.
- [49] Dubois D, Parade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17:191 - 209.
- [50] Yao Y Y. Notes on rough sets approximations and associated measures[J]. Journal of Zhejiang Ocean University: Natural Sciences, 2010, 29: 399 - 410.
- [51] Wille R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[C]//Rival I, ed. Ordered Sets. Reidel: Dordrecht - Boston, 1982: 445 - 470.
- [52] Ganter B, Wille R. Formal concept analysis[M]. Berlin: Springer, 1999.
- [53] 张文修, 姚一豫, 梁怡. 粗糙集与概念格[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.
- [54] Yao Y Y. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis [C]// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing, RSCTC 2004. 2004, LNCS (LNAI) 3066: 59 - 68.
- [55] Quinlan J R. Learning efficient classification procedures and their application to chess endgames [C]//Michalski J S, Carbonell J G, Mitchell T M, eds. Machine Learning: An Artificial Intelligence Approach. Palo Alto, CA: Morgan Kaufmann, 1983, 1: 463 - 482.
- [56] Qian Y H, Liang J Y, Pedrycz W, et al. Positive approximation: An accelerator for attribute reduction in rough set theory[J]. Artificial Intelligence, 2010, 174: 597 - 618.

三支决策

理论与应用

贾修一 商琳 周献中 梁吉业 编著
苗夺谦 王国胤 李天瑞 张燕平