

第 1 章 三支决策概述

姚一豫¹ 于 洪²

1. 里贾纳大学计算机科学系
2. 重庆邮电大学计算智能重庆市重点实验室

过犹不及。

——《论语·先进》

尽信书，则不如无书。

——《孟子·尽心章句下》

1.1 三支决策思想

为了对概率粗糙集和决策粗糙集的三个域提供一个合理的语义解释，姚一豫提出了三支决策的概念^[1-3]。进一步研究发现，三支决策不局限于粗糙集，而是一种更一般的、有效的决策和信息处理模式，有必要建立一个新的体系^[4]。

三支决策的主要思想是将整体分为三个独立的部分，对不同的部分采用不同的处理方法，为复杂问题求解提供了一种有效的策略与方法。近年来，众多学者都在思考怎样将朴素的三支决策思想转换为一个理论系统、信息处理模式和计算方法。关于三支决策的理论、模型与应用研究获得了一定的进展，如决策分析与不确定性^[5-8]、三支聚类分析^[9, 10]、垃圾邮件过滤^[11, 12]、三支决策空间^[13]、代价敏感三支决策^[14-16]、三支决策与博弈论^[17-19]、多粒度三支决策^[20-22]、序列三支决策^[23-25]、动态三支决策^[26-28]、三支概念分析^[29]、三支决策与逻辑^[30]、基于 Web 的应用^[31-34]、多标准的分类和多视角的决策模型等^[35-41]。更多的研究成果请参考附录：三支决策理论与应用已有成果文献。

1.1.1 中庸与三支决策

中国传统文化中的中庸之道博大精深，既适用于修身养性、为人处世，也适用于科学研究、复杂问题求解和信息处理。三支决策思想和中庸思想有密切关系，它们的一个共同点是基于“度”将一个问题“一分为三”^[42-44]，即两个端点和一个中间点。“中”可以理解为“合适”或“恰如其分”，中庸思想给出的一个策略是“执两用中”，强调中间点。另外，对于不同的实际问题，三支决策强调的重点不同，有时强调一个或两个端点，有时强调中间点。

下面列举两个与中庸思想相关的例子。

孔子的学生子贡问孔子，他的同学子张和子夏哪个更贤明一些。孔子说，子张常常超过周礼的要求，子夏则常常达不到周礼的要求。子贡又问，子张能超过是不是好一些，孔子回答说超过和达不到的效果是一样的。“过”和“不及”是做事的两个极端，而“及”可以看成这两个极端的折中点。孔子说“过”和“不及”其实效果是一样的，都是不可取的。做事情既不要做过，也不要达不到，而是要做到恰如其分。

孟子用《尚书》作为例子，探讨了读书方法。孟子说，完全相信《尚书》，那还不如没有《尚书》。就《武成》这一篇来说，也只可信其中的一部分。这里，“尽信”和“无书”是两个极端，而“信”是中间点。后人引申为“尽信书不如无书”。给出了读书的真谛：既不要“尽信书”，也不要“不信书”；既不要“滥读书”，也不要“不读书”。与孔子讲的做事如出一辙，读书中的“度”也体现了恰如其分的重要性。

从这两个故事，可以看出三支决策涉及的两个主要方面：首先，将一个整体分为三部分；其次，基于三部分进行处理。如何将一个整体分为三部分，需要衡量“过”和“不及”以及“尽信”和“无书”。显然，这其中蕴涵“度”的问题。超过某个“度”就“过”了，没有达到某个“度”，就是“不及”。这就是通常说的做事情做到恰如其分。“分”，就是合适的界限或分寸的意思。通过“不及”和“及”、“过”和“无书”、“信”和“尽信”给出了做事和读书的三种境界。中庸强调中间（点）的重要性，可以看成三支决策的一类应用；而某些问题求解强调的是两个极端（点）的重要性，也是三支决策的一类应用。三支决策将整体分为三部分，对于具体问题，三支决策的问题求解和信息处理侧重于三部分中的一部分、两部分或全部。

1.1.2 三支决策复杂问题求解实例

接下来，列举几个应用三支决策思想解决复杂问题的实例。

1. 患者三支分类

在紧急医疗服务系统中，人们常常使用 Triage 患者分类系统。Triage 这个术语可能产生于拿破仑战争时期，是一个对患者进行分类、用于决定哪些患者优先治疗的分类方法^[45]。

第一次世界大战中，在医生、医疗物质贫乏的情况下，法国医生根据 Triage 原则来决策哪些伤员优先治疗。具体说来，Triage 就是将患者（伤员）分为三类^[45]。

(1) Those who are likely to live, regardless of what care they receive.

(2) Those who are likely to die, regardless of what care they receive.

(3) Those for whom immediate care might make a positive difference in outcome.

战地医院对到来的伤员，首先根据其伤势判断：第一类伤员不管是否接受治疗，他肯定能活下去，如一般的轻伤；第二类伤员不管接受哪种治疗，他肯定会死亡，如

伤及关键部位；第三类伤员如果马上采取治疗措施，对其未来影响重大。医疗机构首先基于伤员受伤的严重程度确定其需要的治疗方法，在这个基础上对伤员进行分类。显然，医生会首先关注第三类伤员。当医疗资源不足时，这种分类方法发挥了重大作用。目前，基于这种原则的患者分类方案在紧急医疗服务系统中广泛使用。

2. 学生三支分类

雷夫·艾斯奎斯 (Rafe Esquith) 自 1984 年以来任教于美国洛杉矶霍伯特小学。该校九成学生家庭贫困，且多出自非英语系的移民家庭。从教以来，他一直担任五年级教师，在 56 号教室创造了轰动全美的教育奇迹。他的学生成绩高居全美标准化测试 (AST) 前 5%。他们谦逊有礼而且诚实善良，很多学生顺利进入哈佛、普林斯顿、斯坦福等名校就读。他因此荣获“全美杰出教师”等多项荣誉。

2012 年 3 月 6 日，雷夫受邀到北京大学百年讲堂进行专场演讲。在回答关于如何对待好学生和差学生的问题时，他谈到^[46]：“在我眼里，学生分三种，我称为孩子一、孩子二、孩子三。孩子一是天才，聪明、爱上学、爱老师、出身好，有他们在我的班级里真的很幸福。孩子三，不喜欢上学、每次考试都不及格、非常憎恨老师，父母也不配合老师。大部分老师都把时间花在孩子一和孩子三身上，因为孩子一聪明、学得快，不用花很多时间就能教会。对于孩子三，如果不花时间，他就会毁了你的生活，给你带来很多麻烦。而我呢，就把时间花在普通的孩子二身上，他们普通、平凡，数学不是最好，写作文不是最好，其他也一般，但是他们不捣乱，老师不会在他们身上花太多精力。我把大部分精力放在他们身上，让他们做得更好。我看到一个小女孩，我会告诉她，你的声音很好听，我最幸运的一件事就是有你在我的班级，我迫不及待等着你的成功。她就会非常兴奋，就会转化成孩子一的行为，当孩子三在那里找麻烦的时候，他们就会找不到捣乱的伴。让孩子二来影响班级，就会形成良好的班风，安静、和谐。对于孩子三，老师的任何办法都不会奏效，只有为他们创造更有趣的课程，让他们产生兴趣，才能改变他们。”

雷夫对学生分类，和处理患者分类的 Triage 系统有共同之处，但又有许多不同之处。一方面学生不是如人们常见的称为“好学生”“差学生”和“中等学生”，而是称为“孩子一”“孩子二”和“孩子三”。显然，在第二种称呼中，不具有明显的感情好恶，至少在心理上减少了教师对孩子喜恶感的暗示。另一方面，在关注这些孩子的重点上是不一样的，很多教育者的重点是关注“极端”孩子，而雷夫关注的重点是中间域的“孩子二”，以及如何实现他们的转化，即如何关注“孩子二”使其成为“孩子一”；而对于“孩子三”，在已有课程体系不奏效的情况下，他提出创造新课程实质上就是一种引进新信息从而帮助解决问题的方法。

3. 基于频率的词分类

语言学家齐夫 (Zipf) 在对文献词频规律的研究中发现，若把一篇较长的文章中

每个词出现的频率从高到低进行递减排列，则每个词出现的频率与它的名次的常数次幂存在简单的反比关系，这种分布就称为 Zipf 定律^[47]。在图 1.1 中^[48, 49]，横坐标表示词的排队序号（words by rank order），纵坐标表示词出现的次数（frequency of words），词序号和词频之间存在着类似双曲线的关系。Zipf 定律表明，在英语单词中，只有极少数的词被经常使用，而绝大多数词很少被使用。实际上，包括汉语在内的许多语言都有这种特点。Zipf 定律应用于情报检索用的词表编制和情报检索系统中文档结构的设计。研究词频分布对编制词表、制定标引规则、进行词汇分析与控制和分析作者著述特征具有一定意义。

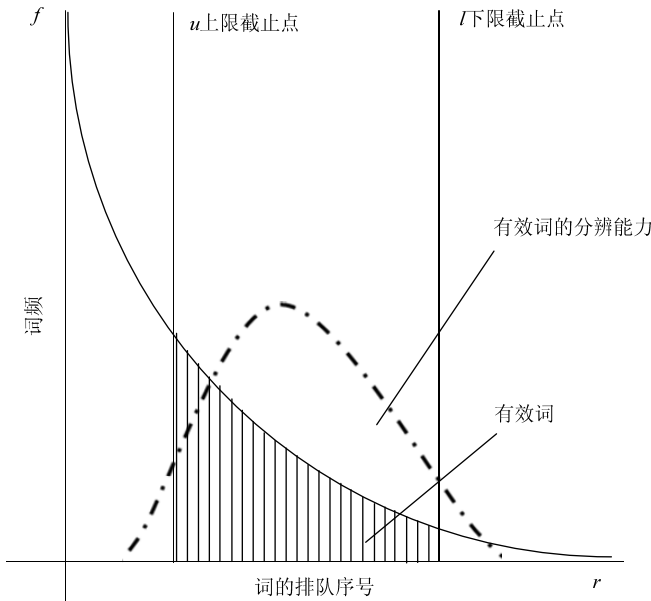


图 1.1 词频和词的排队序号曲线^[48, 49]

在文献自动分类等工作中，大家很自然地将词分为了三类：高频词、中频词和低频词。经验表明，中频词往往包含大量有检索意义的关键词。而一篇文献全文输入计算机后，计算机是很容易检索出中频词的。因此，词频分布也是文献自动分类、自动标引的研究对象。一种很重要的自动摘要算法就是基于词频统计法设计的^[50]。基于 Zipf 定律，卢恩 (Luhn)^[49]给出了词的三支分类方法及其在自动文本分析中的应用。如图 1.1 所示，虚线表示不同词描述文本的能力，线上有一个峰点，向两侧渐趋近于零。直线 u 和 l 分别表示上限阈值和下限阈值。处于这两个阈值点之间的词就是重要词/有效词，即在一篇文档中使用较多的词，也就是通常意义上的中频词。词频高于 u 的词是常见词（高频词），词频低于 l 的词是罕见词/生僻词（低频词），这些词对文章内容的贡献不大。

在这个文本分析的例子中，实际上也融合了三支决策思想。文本分析关注的重点往往是那些中频词，而中频词的界定借助于两个阈值 u 和 l 。

4. 基于两个阈值的医疗决策模型

医生进行医疗决策时，需要考虑到诊断的不确定性。在基于概率推理的医疗决策中，可使用概率来表示这种不确定性；当获得新信息时，使用贝叶斯理论来更新概率评估值。根据诊断测试的准确度和患者可能患有某种疾病的概率，可以用两个阈值作出治疗、不治疗和继续诊断测试的三支决策模型^[51-53]。

图 1.2 给出了基于阈值的医疗决策模型示意图，两个阈值分别是检测阈值和检测-治疗阈值。根据患者患病的验前概率将患者分为三种情况，然后采取不同的处理措施。当验前概率低于检测阈值时，医生既不治疗也不用考虑对患者作进一步的诊断测试；当概率超过检测-治疗阈值时，医生根本就不需要给患者进行检测，直接进行相应的治疗；当概率处于两个阈值之间时，医生作出让患者进行继续诊断测试/检测的决策。

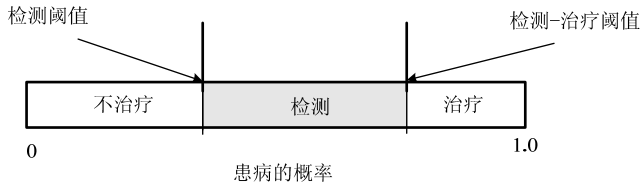


图 1.2 基于阈值的医疗决策模型示意图^[51-53]

根据患者患某种病的可能性，将患者分为三类；一类患者患病的可能性非常低，肯定不需要治疗；一类患者完全可以确定已经患病，应该马上接受治疗；而处于中间域的一类患者，需要进行进一步的测试，从而提供新的信息来帮助医生判断其是否真的患了某种疾病。

5. 儿童压力的三种类型

美国国家儿童发展科学委员会（The National Scientific Council On The Developing Child）根据其研究结果，提出儿童的压力有三种类型^[54]。

(1) 正压力（positive stress）。这种压力导致的不良反应是短暂的。当儿童进入一个新的托儿所，遇到新的人，或者喜爱的玩具被别人拿走时，他们都会感受到压力。这种压力会导致轻微的生理变化，包括增加心脏速率和激素水平的变化。但是，随着成年人充满爱心的关怀，他们可以学习如何管理和克服这种压力。这种类型的压力被认为是正常的，并被认为是一个人成长过程中的重要部分。

(2) 可以忍受的压力（tolerable stress）。这种不良体验更激烈，但还是比较短暂的。例如，所爱的人的死亡、自然灾害、一个可怕的事故、父母分居或离婚等。如果一个儿童能得到成年人足够的关爱，这种可以忍受的压力通常可以克服。在许多情况下，可以忍受的压力可以转变成正压力，有利于儿童的发育。然而，如果儿童缺乏足够的关爱，可以忍受的压力就变为有害压力，并导致对身心健康长期的负面影响。

(3) 有害压力（toxic stress）。激烈不良反应导致的有害压力可能随着时间的推移

持续数周、几个月甚至几年的一个长时期。虐待儿童，其中包括虐待和忽视，就是一个有害压力的例子。儿童无法自行有效地管理这种类型的压力。其导致的结果就是压力反应系统长期处于紧张状态，这可能会严重影响儿童大脑的发育成长。成年人的关爱会减少有害压力的负面影响。成年人适当的支持和干预能帮助儿童应激反应系统恢复到正常基线。

儿童承受的压力有三种类型。对于这三种类型的压力，心理学工作者、教育者或家长等成年人的态度、处理方式是不一样的。正压力是儿童成长过程中的重要组成部分，当正压力在儿童身上发生时，成年人的帮助体现在教儿童学会如何管理和克服这种压力。当可以忍受的压力发生时，成年人的适当帮助会使这种压力转变为正压力；如果成年人的关爱不够，这种压力就有可能变为有害压力。当有害压力产生时，儿童无法自行有效地管理这种类型的压力，这时候成年人的正面干预是最需要的，而且影响力会更明显，也更重要。

1.1.3 三支决策问题求解的普遍性

三支现象不仅存在于医疗、教育和文本处理等领域，在人类社会生活中也普遍存在。例如，谈到人的德行时，亚里士多德说：“过度和不及都是恶，中道才是德行，是最高的善和极端的正确。”他进而列举：在怯懦与鲁莽之间是勇敢；在放纵和拘谨之间是节制；在吝啬和挥霍之间是慷慨；在矫情和好名之间是淡泊；在戏谑和木讷之间是机智等^[55]。

三支决策的思想显然是二支决策的一种推广，是在两种端点/极端情况下引入了第三种情况。对于广泛存在的三支现象，可以从不同的视角来理解。

(1) 空间 (spatial)。有上 (top)、中/不上不下 (middle)、下 (bottom) 的说法；有前 (front)、中/不前不后 (middle)、后 (back) 的位置的不同；也有左 (left)、中/不左不右 (center)、右 (right) 的相对关系。

(2) 时间 (temporal)。小粒度上的划分，有昨天 (yesterday)、今天 (today)、明天 (tomorrow)；更大粒度上的划分，有过去 (past)、现在 (present)、将来 (future)。

(3) 尺寸和体积 (size and volume)。有长 (long)、不长不短 (medium)、短 (short) 的区别；有高 (high)、不高不低 (medium)、低 (low) 的差别；也有大 (large)、不大不小 (medium)、小 (small) 的度量。

(4) 态度 (attitude)。对事物的看法可能是赞成 (positive)、中立 (neutral) 或者反对 (negative) 的；也可能对一个决策持接受 (accept)、不承诺 (non-commitment) 或拒绝 (reject) 的态度。

(5) 评价 (evaluation)。是/对 (yes/right)、可能/不明确 (maybe)、非/否/错 (no/wrong)；高 (upper/top)、不高不低 (middle)、低 (lower/bottom)；好 (good)、不好不坏 (so-so)、坏 (bad)。

事实上，三支决策已经广泛地应用于多个学科和领域，包括医疗诊断^[51-53,56]、社

会判断理论^[57]、统计学中的假设检验^[58]、管理学^[59-61]和论文评审^[62]。例如, Wald^[58]介绍并研究了一个基于三支决策的序列假设验证框架。在该项工作中, 三支决策用于实验的任何阶段, 即接受被检验的假设、拒绝假设和通过进一步验证再下结论。如果能够接受或拒绝被验证假设, 则过程终止; 否则继续进行实验; 实验过程直到得出接受或拒绝时结束。

1.2 三支决策的认知基础及意义

虽然三支现象广泛存在, 三支决策的思想也自古就有, 但将其形成一个理论并进行系统深入的研究还很缺乏。近年来, 众多华人学者参与了这一新学术领域的研究, 期望能将三支决策系统化、模型化和理论化。

下面, 从心理学和认知科学的角度来说明人们选择进行三支决策研究是合理的。

人类在认识这个世界时, 总是倾向于进行分类或归类。分类, 是指按照种类、等级或性质分别归类。这是因为人的信息处理能力总是有限的, 如何高效、低成本地获取信息一直是人类的追求。心理学领域已有研究成果表明, 人类在认知世界的过程中, 倾向于去组织各种事物, 分类是必不可少的, 这些组织活动的结果很可能就是一些典型的结构^[63]。在三支决策活动中, 这一典型结构就是三个域。

认知心理学最重要的贡献之一就是探索人脑能够同时存储和处理信息的局限性。1956年, Miller^[64]最早对短期记忆能力进行了定量研究。通过实验, 他观察到年轻人的记忆广度大约为7个单位(阿拉伯数字、字母、单词或其他单位)。因此, Miller提出魔力数字7的概念, 指出人类处理信息的能力是有限的, 也就是说人脑能够同时处理的信息组块数目在7的基础上加减2这个范围内是比较合适的, 这也称为米勒定律。后来的研究显示广度与组块的类别有关, 如阿拉伯数字为7个, 字母为6个, 单词为5个, 而较长词汇的记忆广度低于较短词汇的记忆广度。

随后, 心理学家、认知生物学家、认知科学家等对于人类能够处理信息的局限性进行了大量研究工作。1986年, Clermont^[65]结合认知心理学, 对诉讼程序过程进行了研究, 指出数字3是这个过程中的魔力数字。例如, 在诉讼过程中, 若双方当事人所列举的证据都不足以证明案件事实, 法官就可以考虑采用优势证据制度, 而典型的证明标准有三种: 优势证据、明显优势证据、排除合理怀疑的证据。2001年, Cowan^[66]进一步的研究结论指出: 年轻人的工作记忆能力为4个组块更合理; 对于儿童和老人, 这个值会低于4。认知生物学家 Kováč^[67]在2009年进行了一项关于因果推理的调查研究工作, 发现人们普遍认为一个事件或者现象发生的原因是3, 而不是像预期那样地认为是Miller提出的数字7。

从人类认知规律来看: 一方面, 将事物简单化, 更有利于认知; 另一方面, 人类处理信息的能力是有限的。科学研究总是希望用简单的模型来解决复杂的问题。认知科学的结论也告诉人们, 人类处理信息的能力是有限的, 以4左右的组块数为宜。尽

管也可以研究四支、五支或六支决策等，但以模型简化为目的，三支决策有其优势。此外，三支更易于转换为二支，这样也有利于基于二值逻辑的计算机系统的实现。

人类总是倾向于从万物、历史、数学中寻找解决问题的方法。古往今来，很多学者都提到三分法解决问题的有效性。在一些平面设计中，数字 3 让页面分割操作变得简洁，让信息变得更加有层次，能够突出特点，创造出令人印象深刻的作品。常数 π (3.14159...) 和 e (2.71828...) 是数学、工程应用中非常重要的两个常数，数字 3 是最接近它们的整数。尽管人们讨论抽象高维空间，而三维空间才是人类可以感知的一个具体实例。

在现有的三支决策应用中，往往都采用定性的和非形式化的描述模型。因此，本书提出三支决策理论，希望建立起一个统一的、独立的三支决策理论框架，深入系统地研究三支决策基本理论概念、分析和处理许多领域中用到的三个选项。

1.3 三支决策

作者曾经在以前的工作中就决策问题分类、三支决策的几何描述等进行了阐述^[39-41]。本节将首先给出三支决策形式化描述，然后讨论在基于评价函数的三支决策研究中面临的一些问题。

1.3.1 三支决策描述

三支决策的主要思想就是将整体分为三个独立的部分，对不同部分采用不同的处理方法，其基本思想可以用图 1.3 来描述。

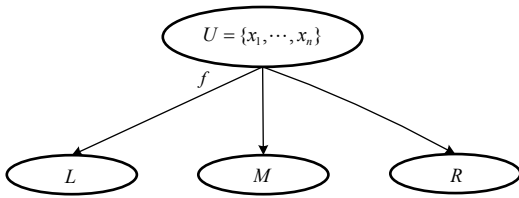


图 1.3 三支决策的三个域

设 $U = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是有限、非空实体(对象)集, C 是有限条件集。三部分分别称为 L -域 (L -region)、 M -域 (M -region) 和 R -域 (R -region), 简记为 L 、 M 和 R 。

定义 1.1 基于条件集 C , 三支决策通过映射 f 将实体集 U 分为三个两两互

不相交的 L -域、 M -域和 R -域, 即

$$U \xrightarrow{f} \{L, M, R\} \tag{1.1}$$

L 、 M 和 R 是 U 的子集, 具有关系 $U = L \cup M \cup R$, 并且 $L \cap M = \emptyset$, $L \cap R = \emptyset$, $R \cap M = \emptyset$ 。但是, 因为某些域有可能是空集, 所以, 严格意义上讲, $\{L, M, R\}$ 不一定是 U 的一个划分。为了讨论方便, 在不引起歧义的前提下, 仍称 $\{L, M, R\}$ 为 U 的一个划分。对应于这三个域, 它们的补集构造如下

$$\begin{aligned}
 L^c &= M \cup R \\
 M^c &= L \cup R \\
 R^c &= L \cup M
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

根据映射 f 的不同情况, 分为定性的三支决策与定量的三支决策。定性的三支决策模型中, 许多实际应用没有显式的映射函数, 实体集被定性地分为三个域。定量的三支决策模型中, 映射是一个关于对象的函数, 通过映射函数, 实体集被定量地分为三个域。映射 f 可以基于条件集量化, 用评价函数来刻画。评价函数反映了某种目标, 也称为目标函数。例如, 在三支决策聚类中, 评价函数可以是决策风险函数, 也可以是类簇之间的相似度函数。

1.3.2 基于评价函数的三支决策

接下来, 以基于评价函数的三支决策模型为例, 讨论在研究工作中应该关注的一些问题。

1. 评价函数的构造与解释

为了实现三支决策, 首先, 需要引入实体的评价函数, 也称为决策函数, 它的值称为决策状态值。其次, 需要引入阈值, 这样基于阈值和决策状态值就可以将所有实体划分到三个域中, 即 L -域、 M -域和 R -域。基于这三个域, 可以构造相应的三支决策动作, 即 L 决策规则、 M 决策规则和 R 决策规则。对于映射到三个域的实体, 也可以使用相应的决策规则来进行描述。

实体评价函数的构造因具体应用需求的不同而有所不同, 如代价、风险、错误、利润、效益、用户满意度和投票等。评价函数既可以是单评价函数, 即 $f = v(x)$; 也可以是双评价函数; 或者是多评价函数, 即 $f = \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_r(x)\}$ 。对于不同域的决策, 既可以采用相同的评价函数, 也可以采用不同的评价函数。此外, 评价函数的构造还应该考虑条件集 C 。

2. 评价函数值域的构造与解释

通过实体评价函数可以对实体所处的状态进行估计和比较。实体评价函数的取值代表了实体满足条件集 C 的程度, 并且其取值是具有可比性的。通常情况下, 可以在实体评价函数的值域上建立某种序的关系。例如, 评价函数的值域可以是全序集 (如整数、实数集合和有限个等级等), 也可以是偏序集或格。

3. 三个域的构造与解释

在基于全序的单评价函数三支决策中, 通过引入一对阈值 (α, β) 就可以将决策状态值映射到三个域, 即 L -域、 M -域和 R -域。不失一般性, 这里假设 $\alpha \geq \beta$ 。一种简单的三支决策规则就可以如下构造: 如果实体的决策状态值小于阈值 β , 即 $v(x) < \beta$, 则其属于 L -域; 如果实体的决策状态值介于两个阈值之间, 即 $\beta \leq v(x) \leq \alpha$, 则其属于 M -域; 如果实体的决策状态值大于阈值 α , 即 $v(x) > \alpha$, 则其属于 R -域。图 1.4 为基于单评价函数的三支决策示意图。

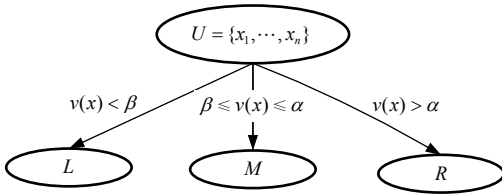


图 1.4 基于单评价函数的三支决策示意图

下面来看一个例子，世界银行根据 Atlas 计算方法^[68]得到人均国民总收入 (GNI per capita)，从而将全世界的经济体分为三类。2015 发布的财政年度数据显示^[69]，2013 年人均国民总收入 (GNI per capita) 低于 1045 美元的是低收入经济体，人均国民总收入为 1045~12746 美元的是中等收入经济体，而人均国民总收入高于 12746 美元的是高收入经济体。显然，这是一个典型的基于单评价函数的三支决策计算模型的应用。在这个例子中，各个经济体就是研究的实体，两个阈值分别为 $\alpha = 12746$ 、 $\beta = 1045$ ，评价函数就是 Atlas 用以计算人均国民总收入的计算方法。

考虑到三个域的互补关系 (见式 (1.2))，也可以只构造其中的两个域。例如，因为 $M = (L \cup R)^c$ ，就可以只构造 L 和 R 。由于决策状态值反映了实体满足条件集 C 的程度，所以决策规则的构造应使决策结果满足单调性。即当实体 x 的决策状态值 $v(x)$ 落在 L 时，决策状态值小于或等于 $v(x)$ 的实体也应落在 L ；当实体 x 的决策状态值 $v(x)$ 落在 R 时，决策状态值大于或等于 $v(x)$ 的实体也应落在 R 。

考虑到三个域的互补关系 (见式 (1.2))，也可以只构造其中的两个域。例如，因为 $M = (L \cup R)^c$ ，就可以只构造 L 和 R 。由于决策状态值反映了实体满足条件集 C 的程度，所以决策规则的构造应使决策结果满足单调性。即当实体 x 的决策状态值 $v(x)$ 落在 L 时，决策状态值小于或等于 $v(x)$ 的实体也应落在 L ；当实体 x 的决策状态值 $v(x)$ 落在 R 时，决策状态值大于或等于 $v(x)$ 的实体也应落在 R 。

4. 三个域的应用

应用研究是领域相关的，因此，三个域的应用研究应结合具体的应用领域。研究重点既可以只关注其中某个域，也可以关注其中的某些域；同时，也应该关注各个域之间的转换问题。例如，在商业营销中，营销对象可能分为忠实粉丝 (R -域)、观望者 (M -域)、不感兴趣者 (L -域)。通常人们会认为，营销重点应该是在那些观望者中，如果能将他们变为 R -域，显然会增加盈利。可能存在这种情况：某些目前处于 L -域的个体，需要付出一定的代价使其变为 R -域中的对象；但是，一旦他们变为 R -域中的对象，带来的价值会远远超过你的“付出”。显然，这样的转换问题也是值得研究的。

简而言之，三支决策就是研究如何将整体分为三部分和如何用这三部分的问题。“分”的过程中涉及评价函数、标准、度量等问题，“用”的过程中涉及关注域的不同或者域的转换等问题。

1.4 基于集合论构造三支决策

集合论是常用的描述概念的有效工具。本节结合区间集、三值逻辑、多值逻辑、模糊集、阴影集和粗糙集等集合理论说明如何构造三支决策并给出其语义解释。

1.4.1 区间集与三支决策

区间集提供了一种描述部分已知概念的方法^[70, 71]。一方面，其假设一个对象可以确

定地被判断为是否是某个概念的实例；另一方面，由于信息与知识的不完整性或不确定性，只有一部分对象可以被确定其是否为这个概念的实例。也就是说，通过上界和下界来描述部分概念。设 U 为非空有限集合，则下列闭区间为空间 2^U 上的一个子集

$$[A_l, A_u] = \{A \in 2^U \mid A_l \subseteq A \subseteq A_u\} \quad (1.3)$$

式中， A_l 、 A_u 分别称为下界和上界，并且 $A_l \subseteq A_u$ 。

区间集与 Kleene 三值逻辑^[72]也有联系，三值逻辑在标准的二值逻辑中加入了第三值逻辑。第三值可描述为不可知或不可确定。令 $L = \{F, I, T\}$ 为一个真值集合，且满足全序关系 $F \leq I \leq T$ 。则区间集 $[A_l, A_u]$ 可等价地由如下接受-拒绝评价函数定义

$$v_{[A_l, A_u]}(x) = \begin{cases} F, & x \in (A_u)^c \\ I, & x \in A_u - A_l \\ T, & x \in A_l \end{cases} \quad (1.4)$$

尽管基于全序关系的评估函数要求严格，但这种评估函数具有运算上的优势。即可以通过与一对阈值进行比较而得到三个区域。假设接受与拒绝由一对阈值 (T, F) 定义，那末根据定义 1.1，则有如下基于区间集表示的三支决策

$$\begin{aligned} R_{(T,F)}([A_l, A_u]) &= \{x \in U \mid v_{[A_l, A_u]}(x) \geq T\} = A_l \\ L_{(T,F)}([A_l, A_u]) &= \{x \in U \mid v_{[A_l, A_u]}(x) \leq F\} = (A_u)^c \\ M_{(T,F)}([A_l, A_u]) &= \{x \in U \mid F < v_{[A_l, A_u]}(x) < T\} = A_u - A_l \end{aligned} \quad (1.5)$$

通过评估函数与阈值 (T, F) 就决定了 L -域、 M -域和 R -域。区间集的下界 A_l 就是 R ，上界的补集就是 L ，而上下界的差就构成了 M 。

1.4.2 粗糙集与三支决策

Pawlak 粗糙集采用可定义集来近似说明不确定性概念^[73]。设 $E \subseteq U \times U$ 是 U 上的一个等价关系，具有自反性、对称性和传递性。包含对象 x 的等价类记为 $[x]_E = [x] = \{y \in U \mid xEy\}$ 。 E 的所有等价类称为由 E 产生的商集，记为 U/E 。

对于 $A \subseteq U$ ， A 的上下近似定义为

$$\begin{aligned} \overline{\text{apr}}(A) &= \{x \in U \mid [x] \cap A \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in U \mid \neg([x] \subseteq A^c)\} \\ \underline{\text{apr}}(A) &= \{x \in U \mid [x] \subseteq A\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

基于上下近似的定义，Pawlak 粗糙集中的正域、负域和边界域表示为

$$\begin{aligned} \text{POS}(A) &= \underline{\text{apr}}(A) \\ &= \{x \in U \mid [x] \subseteq A\} \\ \text{NEG}(A) &= U - \overline{\text{apr}}(A) \\ &= \{x \in U \mid [x] \subseteq A^c\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{BND}(A) &= \overline{\text{apr}(A)} - \underline{\text{apr}(A)} \\
&= \{x \in U \mid \neg([x] \subseteq A^c) \wedge \neg([x] \subseteq A)\} \\
&= (\text{POS}(A) \cup \text{NEG}(A))^c
\end{aligned} \tag{1.7}$$

设 $L_a = L_r = \{F, T\}$, $F \leq T$, $L_a^+ = L_a^- = \{T\}$ 。在同一个等价类的对象具有相同的描述。那么基于对象的描述, 就有如下的接受-拒绝评价函数

$$\begin{aligned}
v_{(a,A)}(x) &= \begin{cases} T, & [x] \subseteq A \\ F, & \neg[x] \subseteq A \end{cases} \\
v_{(r,A)}(x) &= \begin{cases} T, & [x] \subseteq A^c \\ F, & \neg([x] \subseteq A^c) \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

根据定义 1.1, 对于 $A \subseteq U$, 就可以有如下基于经典 Pawlak 粗糙集表示的三支决策

$$\begin{aligned}
\text{POS}_{(\{T\}, \{T\})}(A) &= \{x \in U \mid v_{(a,A)}(x) \in \{T\} \wedge v_{(r,A)}(x) \notin \{T\}\} \\
&= \{x \in U \mid v_{(a,A)}(x) = T\} \\
&= \{x \in U \mid [x] \subseteq A\} \\
\text{NEG}_{(\{T\}, \{T\})}(A) &= \{x \in U \mid v_{(a,A)}(x) \notin \{T\} \wedge v_{(r,A)}(x) \in \{T\}\} \\
&= \{x \in U \mid v_{(r,A)}(x) = T\} \\
&= \{x \in U \mid [x] \subseteq A^c\} \\
\text{BND}_{(\{T\}, \{T\})}(A) &= (\text{POS}(v_a, v_r) \cup \text{NEG}(v_a, v_r))^c \\
&= \{x \in U \mid \neg([x] \subseteq A) \wedge \neg([x] \subseteq A^c)\}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

很明显, 接受是因为条件 $[x] \subseteq A$ 为真, 拒绝是因为条件 $[x] \subseteq A^c$ 为真。利用这两个条件, 接受和拒绝的决策是没有错误的。当对象既不能确定在正域, 也不能确定在负域时, 这就是一个非承诺决策。在这里, 正域 POS 就是 R -域, 负域 NEG 就是 L -域, 边界域 BND 就是 M -域。

1.4.3 概率粗糙集与三支决策

概率粗糙集模型的近似由决策粗糙集模型给出^[74-76]。定义评估函数为条件概率 $v_A(x) = \Pr(A \mid [x])$, 概率值为 $0 \sim 1$, 是可以比较大小的数值, 可以定义基于概率粗糙集表示的三支决策。给定一对阈值 (α, β) , $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, 则根据定义 1.1, 对于 $A \subseteq U$, 构造出如下基于概率粗糙集表示的三支决策^[77]

$$\begin{aligned}
\text{POS}_{(\alpha, \beta)}(A) &= \{x \in U \mid v_A(x) \geq \alpha\} \\
&= \{x \in U \mid \Pr(A \mid [x]) \geq \alpha\} \\
\text{NEG}_{(\alpha, \beta)}(A) &= \{x \in U \mid v_A(x) \leq \beta\} \\
&= \{x \in U \mid \Pr(A \mid [x]) \leq \beta\} \\
\text{BND}_{(\alpha, \beta)}(A) &= \{x \in U \mid \beta < v_A(x) < \alpha\} \\
&= \{x \in U \mid \beta < \Pr(A \mid [x]) < \alpha\}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

基于概率粗糙集的三支决策不再像经典 Pawlak 粗糙集表示下的正域和负域决策是无错误的, 此时, 有可能发生错误的接受决策和错误的拒绝决策。而且, 接受决策的错误率由 $\Pr(A^c | [x])$ 决定, $\Pr(A^c | [x]) = 1 - \Pr(A | [x]) \leq 1 - \alpha$; 也就是说, 接受决策的错误率最高为 $1 - \alpha$; 同理, 拒绝决策的错误率为 $\Pr(A | [x]) \leq \beta$; 也就是说, 拒绝决策的错误率最高为 β 。可见, 阈值 (α, β) 的语义可以解释为错误的容忍度。

1.4.4 模糊集与三支决策

一个模糊集 A 的特点是从 U 映射到区间 $[0, 1]$, 即 $\mu_A: U \rightarrow [0, 1]$ 。 $\mu_A(x)$ 反映了 $x \in U$ 的隶属程度^[78]。模糊集可以视为一种多值逻辑。借鉴多值逻辑的三值近似, 可以马上得到模糊集的三值近似。关于这点, Zadeh^[78]在提出模糊集的同时, 也说明了其与 Kleene 三值逻辑的关系。

给定一对阈值 (α, β) 与 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, 指定接受和拒绝值域分别为 $L^+ = \{a \in [0, 1] | \alpha \leq a\}$ 和 $L^- = \{b \in [0, 1] | b \leq \beta\}$ 。根据定义 1.1, 如果一个模糊隶属度函数 μ_A 作为接受和拒绝的评价函数, 即 $v_{\mu_A} = \mu_A$ 。那么, 就得到如下形式的用模糊集表示的三支决策

$$\begin{aligned} R_{(\alpha, \beta)}(\mu_A) &= \{x \in U | v_{\mu_A}(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in U | \mu_A(x) \geq \alpha\} \\ L_{(\alpha, \beta)}(\mu_A) &= \{x \in U | v_{\mu_A}(x) \leq \beta\} \\ &= \{x \in U | \mu_A(x) \leq \beta\} \\ M_{(\alpha, \beta)}(\mu_A) &= \{x \in U | \beta < v_{\mu_A}(x) < \alpha\} \\ &= \{x \in U | \beta < \mu_A(x) < \alpha\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Zadeh^[78]给出了上述模糊集的三值近似的解释: ①如果 $\mu_A(x) \geq \alpha$, 则 x 属于 A ; ②如果 $\mu_A(x) \leq \beta$, 则 x 不属于 A ; ③如果 $\beta < \mu_A(x) < \alpha$, 则 x 相对于 A 的状态是不确定的。这种解释明确地使用了接受和拒绝的概念, 与本书的三支决策思想是一致的。

1.4.5 阴影集与三支决策

一个阴影集 A 定义为一个从 U 到三个真值集合的映射^[79], 即 $S_A: U \rightarrow \{0, [0, 1], 1\}$, 三个真值具有关系 $0 \leq [0, 1] \leq 1$ 。值 $[0, 1]$ 表示了阴影集中在阴影中的对象的隶属度。与区间集代数类似, 阴影集代数与 Kleene 三值逻辑也有联系。阴影集也给出了一种三支决策。

与区间集不同的是, 阴影集由一个模糊集 $\mu_A: U \rightarrow [0, 1]$ 构造

$$S_A(x) = \begin{cases} 0, & \mu_A(x) \leq \tau \\ [0, 1], & \tau < \mu_A(x) < 1 - \tau \\ 1, & \mu_A(x) \geq 1 - \tau \end{cases} \quad (1.12)$$

式中, $0 \leq \tau < 0.5$ 。

给出一对阈值 $(1, 0)$ ，真值集合为 $\{0, [0, 1], 1\}$ ，由定义 1.1 和式 (1.11) 与式 (1.12)，可得到如下基于阴影集表示的三支决策

$$\begin{aligned}
 R_{(1,0)}(S_A) &= \{x \in U \mid v_{S_A}(x) \geq 1\} \\
 &= \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq 1 - \tau\} \\
 &= RR_{(1-\tau, \tau)}(\mu_A) \\
 L_{(1,0)}(S_A) &= \{x \in U \mid v_{S_A}(x) \leq 0\} \\
 &= \{x \in U \mid \mu_A(x) \leq \tau\} \\
 &= RL_{(1-\tau, \tau)}(\mu_A) \\
 M_{(1,0)}(S_A) &= \{x \in U \mid 0 < v_{S_A}(x) < 1\} \\
 &= \{x \in U \mid \tau < \mu_A(x) < 1 - \tau\} \\
 &= RM_{(1-\tau, \tau)}(\mu_A)
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

可见，阴影集是模糊集在 $(\alpha, \beta) = (1 - \tau, \tau)$ 时的一种三值近似。类似地，也可以考虑在模糊集 μ_A 上，用一对阈值 (α, β) 来得到阴影集。

文献[79]和文献[80]指出，构建阴影集的阈值 τ 可以通过最小化下列方程来得到

$$\Omega(\tau) = \text{abs}(\Omega_r(\tau) + \Omega_e(\tau) - \Omega_s(\tau)) \tag{1.14}$$

式中， $\text{abs}(\)$ 表示绝对值； $\Omega_r(\tau) = \sum_{\{x \in U \mid \mu_A(x) \leq \tau\}} \mu_A(x)$ ； $\Omega_e(\tau) = \sum_{\{y \in U \mid \mu_A(y) \geq 1 - \tau\}} (1 - \mu_A(y))$ ； $\Omega_s(\tau) = \text{card}(\{z \in U \mid \tau < \mu_A(z) < 1 - \tau\})$ 。 $\Omega(\tau)$ 最小化等价于为式 (1.14) 求解（如果解存在）。尽管阈值 τ 的求解方法形式简单，但这个方程的含义不甚明确，需要进一步的研究。

1.5 本章小结

三支决策的主要思想是将整体分为三个独立的部分，对不同部分采用不同的处理方法，为复杂问题求解提供一种有效的策略与方法。三支决策思想已广泛地应用在医疗科学、商业管理学、心理学、认知科学、计算机科学、工程科学等复杂问题中的决策和信息处理中。本章就三支决策思想的起源、为什么要研究三支决策理论、三支决策描述和其理论研究中的一些问题进行了探讨；基于集合论的观点，以区间集、粗糙集和模糊集等为例说明了如何构造三支决策并给出了相关语义解释。

致 谢

感谢同济大学的王睿智、陕西师范大学的杨海龙和佛山科学技术学院的黄国顺对本章内容、格式和文字等方面所提出的宝贵意见。

参 考 文 献

- [1] Yao Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models. *Information Sciences*, 2011, 181(6): 1080-1096.
- [2] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets. *Information Sciences*, 2010, 180: 341-353.
- [3] Yao Y Y. Three-way decision: An interpretation of rules in rough set theory// *Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 4th International Conference, RSKT 2009, Gold Coast, Australia, 2009: 642-649.*
- [4] Yao Y Y. An outline of a theory of three-way decisions// *Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 7th International Conference, RSKT 2009, Chengdu, China, 2012: 1-17.*
- [5] Liu D, Li T R, Liang D C. Three-way government decision analysis with decision-theoretic rough sets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2012, 20(1): 119-132.
- [6] Zhang X Y, Miao D Q. Three-way weighted entropies and three-way attribute reduction// *Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 9th International Conference, RSKT 2014, Shanghai, China, 2014: 707-719.*
- [7] Jia X Y, Liao W H, Tang Z M, et al. Minimum cost attribute reduction in decision-theoretic rough set models. *Information Sciences*, 2013, 219: 151-167.
- [8] Zhang Z F, Wang R Z. Applying three-way decisions to sentiment classification with sentiment uncertainty// *Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 9th International Conference, RSKT 2014, Shanghai, China, 2014: 720-731.*
- [9] Yu H, Wang Y, Jiao P. A three-way decisions approach to density-based overlapping clustering// *Transactions on Rough Sets XVIII, Springer Berlin Heidelberg, 2014: 92-109.*
- [10] Yu H, Liu Z G, Wang G Y. An automatic method to determine the number of clusters using decision-theoretic rough set. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(1): 101-115.
- [11] Zhou B, Yao Y Y, Luo J G. Cost-sensitive three-way email spam filtering. *Journal of Intelligent Information Systems*, 2014, 42(1): 19-45.
- [12] Jia X Y, Zheng K, Li W W, et al. Three-way decisions solution to filter spam email: an empirical study// *Proceedings of Rough Sets and Current Trends in Computing: 8th International Conference, RSCTC 2012, Chengdu, China, 2014: 287-296.*
- [13] Hu B Q. Three-way decisions space and three-way decisions. *Information Sciences*, 2014, 281: 21-52.
- [14] Zhang H R, Min F, He X, et al. A hybrid recommender system based on user-recommender interaction. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.

-
- [15] Zhang Z, Li Y, Chen W, et al. A three-way decision approach to incremental frequent itemsets mining. *Journal of Information and Computational Science*, 2014, 11: 3399-3410.
- [16] Zhang Y P, Zou H J, Chen X, et al. Cost-sensitive three-way decisions model based on CCA// *Proceedings of Rough Sets and Current Trends in Computing: 9th International Conference, RSCTC 2014, Granada and Madrid, Spain, 2014*: 172-180.
- [17] Yao J T, Azam N. Web-based medical decision support systems for three-way medical decision making with game-theoretic rough sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, 23(1): 3-15.
- [18] Azam N, Yao J T. Game-theoretic rough sets for recommender systems. *Knowledge-Based Systems*, 2014(72): 96-107.
- [19] Yang X P, Yao J T. Modelling multi-agent three-way decisions with decision-theoretic rough sets. *Fundamenta Informaticae*, 2012, 115(2-3): 157-171.
- [20] Qian Y H, Zhang H, Sang Y L, et al. Multigranulation decision-theoretic rough sets. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2014, 55(1): 225-237.
- [21] Wang B L, Liang J Y. A novel intelligent multi-attribute three-way group sorting method based on dempster-shafer theory// *Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 9th International Conference, RSKT 2014, Shanghai, China, 2014*: 789-800.
- [22] Zhao S, Zhang L, Xu X, et al. Hierarchical description of uncertain information. *Information Sciences*, 2014, 268: 133-146.
- [23] Li H X, Zhou X Z, Huang B, et al. Cost-sensitive three-way decision: A sequential strategy// *Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 8th International Conference, RSKT 2013, Halifax, Canada, 2013*: 325-337.
- [24] Zhang L B, Li H X, Zhou X Z, et al. Cost-sensitive sequential three-way decision for face recognition. *RSEISP*, 2014: 375-383.
- [25] Yao Y Y. Granular Computing and Sequential Three-Way Decisions// *Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 8th International Conference, RSKT 2013, Halifax, Canada, 2013*: 16-27.
- [26] Liu D, Li T R, Liang D C. Three-way decisions in dynamic decision-theoretic rough sets// *Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 8th International Conference, RSKT 2013, Halifax, Canada, 2013*: 291-301.
- [27] Luo C, Li T, Chen H. Dynamic maintenance of approximations in set-valued ordered decision systems under the attribute generalization. *Information Sciences*, 2014, 257: 210-228.
- [28] Yu H, Zhang C, Hu F. An incremental clustering approach based on three-way decisions// *Proceedings of Rough Sets and Current Trends in Computing: 9th International Conference, RSCTC 2014, Granada and Madrid, Spain, 2014*: 152-159.
- [29] Qi J J, Wei L, Yao Y Y. Three-Way Formal Concept Analysis// *Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 9th International Conference, RSKT 2014, Shanghai, China, 2014*: 732-741.

- [30] She Y H. On determination of thresholds in three-way approximation of many-valued NM-Logic// Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 9th International Conference, RSKT 2014, Shanghai, China, 2014:136-143.
- [31] Liu Y L, Pan L, Jia X Y, et al. Three-way decision based overlapping community detection// Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 8th International Conference, RSKT 2013, Halifax, Canada, 2013: 279-290.
- [32] Zhou Z, Zhao W B, Shang L. Sentiment analysis with automatically constructed lexicon and three-way decision// Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 9th International Conference, RSKT 2014, Shanghai, China, 2014: 777-788.
- [33] Zhu Y H, Tian H L, Ma J, et.al. An integrated method for micro-blog subjective sentence identification based on three-way decisions and naive bayes// Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 9th International Conference, RSKT 2014, Shanghai, China, 2014: 844-855.
- [34] Yu H, Jiao P, Wang G Y, et al. Categorizing overlapping regions in clustering analysis using three-way decisions// Proceedings of the 2014 IEEE/WIC/ACM International Joint Conferences on Web Intelligence (WI) and Intelligent Agent Technologies (IAT)-Volume 02, Warsaw, Poland, 2014: 350-357.
- [35] 贾修一, 李伟, 商琳, 等. 一种自适应求三枝决策中决策阈值的算法. 电子学报, 2011, 39(11): 2520-2525.
- [36] Liu D, Liang D C. An overview of function based three-way decisions// Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 9th International Conference, RSKT 2014, Shanghai, China, 2014: 812-823.
- [37] Ma X A, Wang G Y, Yu H, et al. Decision region distribution preservation reduction in decision-theoretic rough set model. Information Sciences, 2014: 614-640.
- [38] Li W W, Huang Z, Jia X. Two-phase classification based on three-way decisions// Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology: 8th International Conference, RSKT 2013, Halifax, Canada, 2013: 338-345.
- [39] 贾修一, 商琳, 周献忠, 等. 三支决策理论与应用. 南京: 南京大学出版社, 2012.
- [40] 刘盾, 李天瑞, 苗夺谦, 等. 三支决策与粒计算. 北京: 科学出版社, 2013.
- [41] 李华雄, 周献中, 李天瑞, 等. 决策粗糙集理论及其研究进展. 北京: 科学出版社, 2011.
- [42] 庞朴. 一分为三论. 上海: 上海古籍出版社, 2003.
- [43] Marinoff L. The Middle Way: Finding Happiness in a World of Extremes. New York: Sterling Publishing, 2007.
- [44] 殷业. 三支决策与中庸决策. CRSSC-CWI-CGrC2014 联合学术会议三支决策 Workshop 手稿.
- [45] Triage. http://en.wikipedia.org/wiki/Triage#Conventional_classifications [2015-02-09].
- [46] 周钧辑. 美国小学教师雷夫·艾斯奎斯 (Rafe Esquith) 对中国同行 16 个问题的回答. http://blog.sina.com.cn/s/blog_61b9226d0101m7uu.html[2015-02-09].

- [47] Zipf G K. *Human Behavior and the Principle of Least Effort: An Introduction to Human Ecology*. Oxford, England: Addison-Wesley Press, 1949.
- [48] Rijsbergen C J V. *Information Retrieval*. 2nd ed. London: Butterworths, 1979.
- [49] Luhn H P. The automatic creation of literature abstracts. *IBM Journal of Research and Development*, 1958, 2(2): 159-165.
- [50] Das D, Martins A F T. A survey on automatic text summarization. *Literature Survey for the Language and Statistics II course at CMU*, 2007, 4: 192-195.
- [51] Pauker S G, Kassirer J P. The threshold approach to clinical decision making. *The New England Journal of Medicine*, 1980, 302(20): 1109-1117.
- [52] Lurie J D, Sox H C. *Principles of medical decision making*. Spine, 1999, 24(5): 493-498.
- [53] Cahan A, Gilon D, Manor O, et al. Probabilistic reasoning and clinical decision-making: Do doctors overestimate diagnostic probabilities? *QJM: An International Journal of Medicine*, 2003, 96(10): 763-769.
- [54] Middlebrooks J S, Audage N C. *The effects of childhood stress on health across the lifespan*. Atlanta (GA): Centers for Disease Control and Prevention, National Center for Injury Prevention and Control, 2008.
- [55] 庞朴. 一分为三. 深圳: 海天出版社, 1995.
- [56] Schechter C B. Sequential analysis in a bayesian model of diastolic blood pressure measurement. *Medical Decision Making*, 1988, 8(3): 191-196.
- [57] Sherif M, Hovland C I. *Social Judgment: Assimilation and Contrast Effects in Communication and Attitude Change*. New Haven: Yale University Press, 1961.
- [58] Wald A. Sequential tests of statistical hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1945, 16: 117-186.
- [59] Forster M R. Key concepts in model selection performance and generalizability. *Journal of Mathematical Psychology*, 2000, 44: 205-231.
- [60] Woodward P W, Naylor J C. An application of bayesian methods in SPC. *The Statistician*, 1993, 42: 461-469.
- [61] Goudey R. Do statistical inferences allowing three alternative decisions give better feedback for environmentally precautionary decision-making? *Journal of Environmental Management*, 2007, 85: 338-344.
- [62] Weller A C. *Editorial Peer Review: Its Strengths and Weaknesses*. Medford, NJ: Information Today, Inc., 2001.
- [63] Pinker S. *How the Mind Works*. New York: WW Norton & Company, 1997.
- [64] Miller G A. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 1956, 63(2): 81.
- [65] Clermont K M. Procedure's magical number three psychological bases for standards of decision.

Cornell L Rev, 1986, 72: 1115.

- [66] Cowan N. The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences*, 2001, 24, 87-114.
- [67] Kováč L. Causal reasoning: The “magical number” three. *EMBO reports*, 2009, 10(5): 418-418.
- [68] World Bank Atlas Method. <http://econ.worldbank.org/WBSITE/EXTERNAL/DATASTATISTICS/0,contentMDK:20452009~pagePK:64133150~piPK:64133175~theSitePK:239419,00.html> [2015-02-09].
- [69] Country and Lending Groups. <http://data.worldbank.org/about/country-and-lending-groups> [2015-02-08].
- [70] Yao Y Y. Interval-set algebra for qualitative knowledge representation// *Proceedings of the 5th International Conference on Computing and Information*, Sudbury, Ontario, Canada, 1993: 370-374.
- [71] Yao Y Y. Interval sets and interval-set algebras// *Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Cognitive Informatics*, Hong Kong, 2009: 307-314.
- [72] Kleene S C. *Introduction to Mathematics*. New York: Groningen, 1952.
- [73] Pawlak Z. Rough sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 1982, (11): 341-356.
- [74] Yao Y Y. Probabilistic approaches to rough sets. *Expert Systems*, 2003, 20: 287-297.
- [75] Yao Y Y, Wong S K M, Lingras P. A decision-theoretic rough set model// *Ras Z W, Zemankova M, Emrich M L Methodologies for Intelligent Systems 5*. North-Holland, New York, 1990:17-24.
- [76] Yao Y Y. Probabilistic rough set approximations. *International Journal of Approximation Reasoning*, 2008, (49): 255-271.
- [77] Yao Y Y, Deng X F. Sequential three-way decisions with probabilistic rough sets// *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Cognitive Informatics & Cognitive Computing*, Banff, Canada, 2011: 120-125.
- [78] Zadeh L A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338-353.
- [79] Pedrycz W. Shadowed sets: Representing and processing fuzzy sets. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: IEEE Transactions on Cybernetics*, 1998, 28(1): 103-109.
- [80] Pedrycz W. From fuzzy sets to shadowed sets: Interpretation and computing. *International Journal of Intelligent Systems*, 2009, 24(1): 48-61.