

三支决策研究的若干问题

姚一豫, University of Regina

基于一个阈值, 经典的二支决策将一个集合划分为两个不相交的区域。通过引入一对阈值, 三支决策将一个集合划分为三个两两互不相交的区域。任何二支决策的问题都可以拓广为三支决策。三支决策方案实用、有效, 既避免二支决策所引起的不必要代价, 又具有可解释性。本章讨论了三支决策研究中的十个基本问题, 并指出了可能的研究方向。

1. 引言

在许多决策问题中, 考虑到接受和拒绝的代价都很大, 我们往往既不接受也不拒绝, 而选择不承诺, 这便有了第三个决策选项。三支决策, 通过对不同学科的各种决策问题的抽象, 引入了第三个选项, 即不承诺或延迟决策, 从而避免了直接接受或拒绝带来的风险。三支决策可视为一序列决策步骤中的一个重要的中间环节, 对其中不承诺选项可再做研究, 通过进一步搜集数据、分析数据而最终获得二支决策。三支决策理论的引入将众多学科中的决策方法统一起来, 提供了一个一般性框架, 并提出了新的研究课题。

关于三支决策理论, 2012 年在成都召开的国际粗糙集联合会议 (JRS) 的特邀报告中, 我给出了一个框架性的描述^[1]。我觉得这个理论非常有用, 值得研究, 但是关于该理论的具体细节还不是非常清楚。通过查阅和分析文献, 我发现三支决策的思想和方法简单有效, 在很多领域已有广泛的应用, 但尚未形成一个独立、完善的理论体系。因此, 我的出发点是抛砖引玉, 提出一些还不成熟的观点, 希望引起大家的重视。2012 年, 在由贾修一、商琳、周献中、梁吉业、苗夺谦、王国胤、李天瑞和张燕平编辑的《三支决策理论与应用》^[2]一书中, 大家对三支决策给予了不同的解释和拓展; 在这本由刘盾、李天瑞、苗夺谦、王国胤、梁吉业等编辑的《三支决策与粒计算》一书中, 大家又给出了一些新的想法和应用。对于大家的热情支持, 我表示衷心的感谢, 也希望在大家的共同努力下, 构建一个完善的三支决策理论。

本章的主要目的是探讨三支决策研究的若干问题。有些想法并不完全成熟, 从某种意义上讲, 只是提出了一些问题, 还没有给出答案, 希望这种方式能更有利于互相交流, 共同探讨。本章由若干相对独立的小节组成, 每节讨论一个具体问题。

2. 三支决策研究现状与前景

三支决策的研究才刚刚开始, 由贾修一等编辑的第一本关于三支决策的专著^[2]收录了三支决策研究的最新成果, 为三支决策理论的研究提供了一个良好的开端。在此书中, 众多学者从不同

角度讨论了三支决策的理论与应用。苗夺谦、高灿和张楠^[3]给出了一个基于三支决策理论的半监督学习方法，该方法由半监督属性约简、三支决策和协同训练三个部分组成。基于三支决策思想，将无标记数据划分为正域、负域和无标记样本，通过对正域样本的协同训练逐渐标识所有无标记数据。李华雄、周献中、赵佳宝和黄兵^[4]提出了基于三支决策粗糙集的代价敏感分类方法，有效地将属性约简与代价分类方法结合。文中所讨论的代价敏感学习可能成为三支决策理论的重要应用之一。刘盾、李天瑞和梁德翠^[5]将决策粗糙集应用于政策决策，给出了一个三支政策决策方案，并通过实例说明了该方案的优越性。贾修一和商琳^[6]提出了基于三支决策的垃圾邮件过滤算法，它是三支决策在代价敏感学习中的另一个应用。相关实验表明，该算法非常有效。赵姝和张燕平^[7]用三支决策解释构造性算法，将三支决策与神经网络有效地结合在一起，为三支决策理论提出了一个新的研究方向。姚静涛和张燕^[8]将三支决策与博弈粗糙集结合起来，并给出了一个新的解释，并通过博弈论获得三支决策所需要的阈值。邓晓飞、王洪凯和姚一豫^[9]通过三支决策构造自适应粗糙集近似。同经典近似相比，自适应近似进一步给出了上下近似中的粒结构。该书的附录给出了七十多篇与三支决策相关的文献，如基于三支决策粗糙集的属性约简、三支决策中的阈值计算、决策风险最小化约简、三支决策粗糙集等。

在由刘盾等编辑的关于三支决策的这本书中，大家对三支决策的理论与应用提出了一些新的认识和见解。但同时，我们应看到三支决策的现有研究工作仍主要集中在决策粗糙集的框架上。在很大程度上，三支决策理论的优势并没有完全显现出来。三支决策进一步研究的重点应放在哪里？我想应跳出粗糙集的圈子，同其他学科更紧密地联系起来，走出自己独特的路子。也就是说，三支决策理论是基于粗糙集的研究，但又不应完全局限于粗糙集。新的研究应“青出于蓝而胜于蓝”，以构建一个更普适且更具有应用价值的理论为目的。

虽然三支决策理论尚不成熟，但它的重要性已得到大家的认可。也许有些具体细节需要修正或改进，但在研究的大方向上并无异议。三支决策研讨会为大家相互交流提供了一个平台，使得共同探讨并发展一个新的理论成为可能，这种同研共创的环境和氛围也许比它的一些具体结果更为重要。从对一个现有理论的小修补到一个新理论提出和发展，这是在研究理念上的一次飞跃。虽然这种尝试有一定的风险，但其过程是值得回味的。三支决策的进一步研究应强调多样性和创新性，大家可以不受限制地讨论新颖的、也许尚不成熟的想法。我们共同的努力将可能建立起一个完善的三支决策理论。

3. 三支决策的基本思想

在传统的二支决策中，我们往往只有接受或拒绝、是或非两种选项。但在解决很多实际问题时，强制做出接受或拒绝的决策，会付出不必要的代价或后果。比如，当信息或证据不足时，不

论是接受或拒绝都显得不太合适，也就是说，无论接受或拒绝都比不做决策代价要大。因此，三支决策引入了不承诺的决策选项，从而规避了错误拒绝或错误接受造成的损失。关于三支决策的优势，我们通过医疗诊断和决策中的一个常见的例子来说明。

在医疗诊断和决策过程中，医生通常根据患者的症状以及相关的检查结果来进行诊断。患者的实际状态有患病与健康两种情况，在普通的二支决策中，医生的诊断结果有治疗（即判断患者为患病状态）与不治疗（即判断患者为健康状态）两种。治疗是第一种选择，这种选择的危险是，如果患者本身是健康的，那么选择治疗必然会浪费人力、物力、财力，甚至会对患者的健康造成损害。不治疗是第二种选择，这种选择的危险是，如果患者确实是患病的，那么这种选择明显会耽误患者的康复。表 1 给出了不同决策的代价。

表 1 二支决策的代价矩阵

决策动作	患者状态	
	患病	健康
治疗	治疗代价	治疗代价、 可能损害患者的健康
不治疗	无治疗代价、 耽误疾病治愈	无治疗代价

从已有的检查结果来看，如果患病的可能性比较大(例如，概率大于等于 α)，那么选择治疗是一个比较好的决策；如果患病的可能性比较小(例如，概率小于等于 β)，那么选择不治疗是一个比较好的决策；如果患病的可能性既不小也不大(例如，概率大于 β 且小于 α)，那么选择治疗或不治疗都显得不理想。也就是说，如果强制性地做出二支决策，每种选择都不理想。在这种情况下，考虑所掌握的信息不完全或不准确，通过引入不承诺或延迟决策的第三种选择，三支决策方法可以给出更好的方案，它的代价仅仅是患者再做一些检查。表 2 给出了不同决策的代价。

表 2 三支决策的代价矩阵

决策动作	患者状态	
	患病	健康
治疗	治疗代价	治疗代价、 可能损害患者的健康
不治疗	无治疗代价、 耽误疾病治愈	无治疗代价
进一步诊断	延迟治疗、可能加重病情 和更多检查代价	更多检查代价

基于上例的分析，我们给出三支决策的一个简单描述：

设 U 是有限、非空实体集， C 是有限条件集。三支决策是基于条件集 C ，将

实体集 U 划分为三个两两不相交的区域（即正域、负域和边界域）的过程。

为了实现三支决策，首先，需要引入实体的评价函数，也称为决策函数，它的值称为决策状态值，其大小反映实体的好坏程度。其次，需要引入阈值，这样基于阈值和决策状态值就可将所有实体划分到三个域，即正域、负域和边界域。基于这三个区域，我们可以构造相应的三支决策规则。对于落在正域、负域和边界域的实体，我们分别使用接受、拒绝和不承诺规则。

4. 三支决策的两种模式

在对某一实体 $x \in U$ 进行三支分类时，通过评价函数对实体 x 进行评估，评价函数的值称为实体 x 的决策状态值。在这里，我们仅考虑基于全序集的评价函数。设 $(L, \leq)$ 是一个全序集，其中 L 表示所有可能的决策状态值， $\leq$ 表示 L 上的一个全序关系，即 $\leq$ 满足下面条件：

- (1) 自反性： $\forall a \in L, a \leq a$;
- (2) 反对称性： $\forall a, b \in L, (a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$;
- (3) 传递性： $\forall a, b, c \in L, (a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$;
- (4) 可比性： $\forall a, b \in L, a \leq b$ 或者 $b \leq a$ 成立。

一个全序集的例子是 $([0,1], \leq)$ ，其中 L 是单位区间 $[0,1]$ ， $\leq$ 是小于等于关系 $\leq$ 。实体的评价函数可以看作从实体集合 U 到全序集 L 的映射，即 $v: U \rightarrow L$ 。

根据所用的评价函数的个数，三支决策有两种模式，即双评价函数三支决策和单评价函数三支决策^[1]。第一种模式用双评价函数 v_a 和 v_r ，其中 v_a 用于接受， v_r 用于拒绝。在接受和拒绝函数上各引入一个阈值 γ_a 和 γ_r ，称为接受和拒绝阈值。当接受状态值 $\geq \gamma_a$ 且拒绝状态值 $< \gamma_r$ 时，采用接受；当拒绝状态值 $\geq \gamma_r$ 且接受状态值 $< \gamma_a$ 时，采用拒绝；否则，采用不承诺。更准确地说，三支决策的三个域由以下规则给出：

$$\text{正域: } \text{POS}_{(\gamma_a, \gamma_r)}(v_a, v_r) = \{x \in U | v_a(x) \geq \gamma_a \wedge v_r(x) < \gamma_r\},$$

$$\text{负域: } \text{NEG}_{(\gamma_a, \gamma_r)}(v_a, v_r) = \{x \in U | v_a(x) < \gamma_a \wedge v_r(x) \geq \gamma_r\},$$

$$\text{边界域: } \text{BND}_{(\gamma_a, \gamma_r)}(v_a, v_r) = (\text{POS}_{(\gamma_a, \gamma_r)}(v_a, v_r) \cup \text{NEG}_{(\gamma_a, \gamma_r)}(v_a, v_r))^c,$$

其中， $(\cdot)^c$ 表示一个集合的补集。这三个域两两交集为空，三者并为全集 U 。通过三个域可以构造三支决策规则：正域对应接受，负域对应拒绝，边界域对应不承诺。图 1 给出了第一种模式的三支决策。

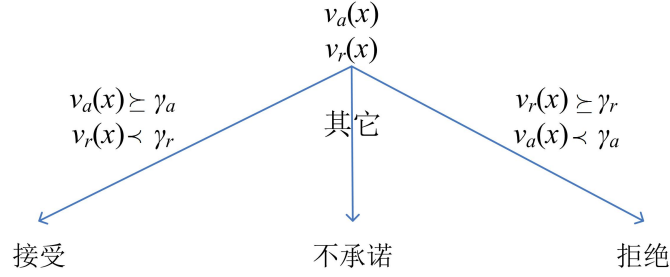


图 1 基于双评价函数的三支决策

第二种模式采用单评价函数，通过引入一对阈值 (α, β) ，将实体集合 U 分为三部分：

正域： $\text{POS}_{(\alpha, \beta)}(v) = \{x \in U | v(x) \succcurlyeq \alpha\}$,

负域： $\text{NEG}_{(\alpha, \beta)}(v) = \{x \in U | v(x) \preccurlyeq \beta\}$,

边界域： $\text{BND}_{(\alpha, \beta)}(v) = \{x \in U | \beta < v(x) < \alpha\}$ 。

图 2 给出了第二种三支决策模式。

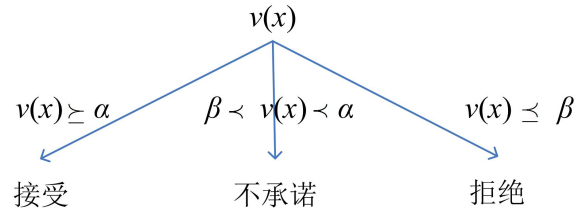


图 2 基于单评价函数的三支决策

5. 三支决策主要研究的问题

在三支决策理论的研究中，至少需要考虑以下几个问题。

首先，需要考虑评价函数值域的构造和解释。在三支决策理论中，通过实体评价函数对实体的状态进行估计和比较。实体评价函数的取值代表了实体满足条件集 C 的程度，并且，它的取值应该是具有可比性的。通常情况下，可以在实体评价函数的值域上建立某种序关系。例如，评价函数的值域可以是全序集（比如整数、实数集合和有限个等级等），还可以是偏序集和格。

其次，需要考虑评价函数的构造和解释。实体评价函数的构造根据具体应用而有所不同，例如代价、风险、错误、利润、效益、用户满意度和投票等。此外，评价函数的构造也应考虑条件集合 C 。对于两种决策动作，即接受和拒绝，可以采用相同的评价函数，也可以采用两个互相独立的评价函数。

在基于单评价函数的三支决策中，通过引入一对阈值 (α, β) ，将决策状态值分为三个区，即指定接受值区、拒绝值区和不承诺值区。这里需要考虑的问题是指定接受值区（**designated values of acceptance**）和指定拒绝值区（**designated values of rejection**）的构造和解释，或者阐明阈值对 (α, β) 的构造和解释。不承诺值区为指定接受值区和指定拒绝值区的补集，因此只需构造接受值区和拒绝值区。接受值区和拒绝值区的构造必须反映人类对接受和拒绝的直观理解。例如，对于任一实体 x ，不能同时做出接受和拒绝两种决策，这就要求接受值区和拒绝值区不能相交。由于决策状态值反映了实体满足条件集 C 的程度，因此，接受值区和拒绝值区的构造应使得决策具有单调性，即当实体 x 的决策状态值 $v(x)$ 落在接受值区时，决策状态值大于或等于 $v(x)$ 的实体也应落在接受值区；当实体 x 的决策状态值 $v(x)$ 落在拒绝值区时，决策状态值小于或等于 $v(x)$ 的实体也应落在拒绝值区。

6. 三支决策的认知意义

1957年，Miller给出了人类信息处理的一个重要结果^[10]。由于短期记忆的限制，我们通常只能处理七个单元左右的信息。近期的研究表明^[11]，我们处理信息的限制比七要小，而是四个单元左右。当所处理的信息量太大时，我们通常采用信息分块（**chunking**）的方式，将大量信息分为可以操作的几个单元。三支决策理论的和这个结果是一致的，通过将一个集合划分为三个区域，就可以达到认知上的简化。事实上，这种三支决策在人类认知和信息处理过程中常常用到。

人类感知中的视觉系统就是三支决策应用的一个最好例证。人的视觉将整个空间分为三个区域：中心视域、周边视域和不可视域，这为视觉信息处理提供了一个切实有效的方法。中心视域可提供清楚的视觉影像与色彩信息，周边视域（即我们常说的余光区域）仅给出了结构性信息，不可视域则观察不到。从三支决策的观点看，中心视域可以看做正域，它提供准确和清晰的信息；余光区可以看做边界域，它提供了不确定和不准确的信息；不可视域可以看做负域，它表示没有信息。对于三个视域，人们可以采用不同的处理方式：将主要精力放到中心视域，并对余光区的信息进行关注。虽然边界域无法提供准确的信息，但它的作用也是不可忽视的，它提供的信息可以使人们及时应对各种紧急事件的发生。例如，在司机驾驶过程中，视域中的正域部分提供了大部分的有效信息，前方的路况往往是需要司机集中大部分注意力的区域；视域中的边界域部分（即余光区域）提供了不精确的信息，它只占用了司机小部分的注意力；但当左右两侧发生紧急事件时，边界域的信息可以帮助司机迅速有效地做出反应。

人类视觉的另一个特点是可以随时转换三个区域。当眼睛或头转动时，我们可以从一个三支划分转换到另一个三支划分。比如，边界域可以转换为正域，使我们能够重新聚焦并重新处

理。这种转换思想应该体现到三支决策理论里，也就是说，三支决策理论应该考虑观察角度的动态变化和三个区域的转换。

自然语言学习和处理则体现了三支决策在人类认知领域的应用。基于词出现的频率，可以将词汇分为常用词、偏僻词和一般用词。常用词出现频率大，一般词出现频率居中，对交流非常有用，而偏僻词出现频率小，几乎不影响交流。在学习过程中，必须首先掌握常用词，学习一般用词，而延迟学习偏僻词。这同三支决策的思想是完全一致的，即集中精力解决主要问题，关注次要问题，忽略不相关问题。

从这两个例子可以看出，三支决策是人类信息处理的一个有效模式。将一个大区域分为三个小区域，可以合理地分配精力，从而达到事半功倍的处理效果。因此，三支决策理论可以看做是对人类已有的信息处理模式的一个显式建模，希望能得到更广泛的应用。

7. 决策问题分类

三支决策可以看做是一种特殊的决策策略。根据实体的状态（即对条件的满足性）和决策方案，表 3 给出了决策问题的分类。从实体状态的角度来看，不同的决策方案的解释是不同的。对于两状态问题，评价函数的值并不一定是二值的，评价函数的值可以理解为对某一个状态可能性的估计。因此，根据状态的可能性可以做出二支、三支或 M 支的决策。当实体的状态是多个时，评价函数可以看作是对状态值的估计，决策方案可以看作是对状态值的一个近似。

表 3 决策问题分类

实体的状态	决策方案		
	二支决策	三支决策	M 支决策
两状态	I 类	II 类	III 类
多状态	IV 类	V 类	VI 类

通常，二支决策需要单评价函数 $v: U \rightarrow L$ 和一个阈值 γ ，当一个实体的决策状态值大于等于该阈值时，选择接受决策，反之选择拒绝决策。图 3 给出了二支决策的一个描述。基于单评价函数的三支决策需要引入一对阈值，当决策状态值大于等于接受阈值时，选择接受；小于等于拒绝阈值时，选择拒绝；在两个阈值之间时，选择不承诺。 M 支决策可以用单评价函数及 $M-1$ 个阈值，根据决策状态值所落的区间选择 M 个决策中的一个决策。

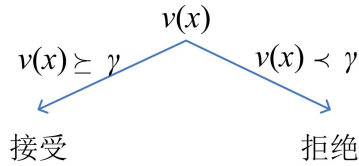


图 3 二支决策

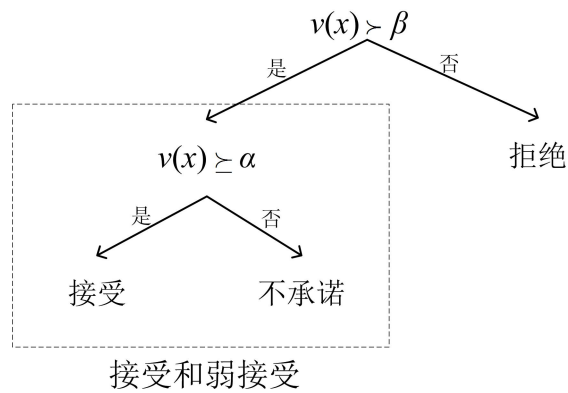
很多机器学习和分类方法^[12]给出了 I 类问题的例子。它们用二支决策的正域去逼近其中一个状态，而用负域去逼近另一个状态。

决策粗糙集理论^[13~15]是 II 类决策问题的一个例子，其中，每一个元素有两个状态，即属于集合 X 或不属于 X ，评价函数为条件概率 $Pr(X|[x])$ ，表示在 $[x]$ 中的实体属于 X 的概率，基于阈值对 (α, β) 可以获得概率正域、负域及边界域。

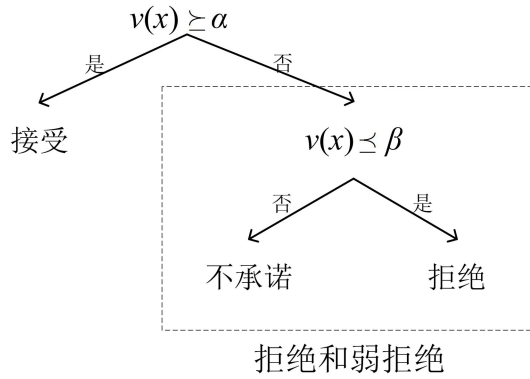
决策阴影集理论^[16]是 V 类问题的一个例子。其中，模糊隶属函数是实体状态的评价函数，其值表示一个实体的状态，基于一对阈值可以将一个模糊集用一个三值的阴影集近似。具体地说，当一个实体的模糊隶属度非常接近 1 时，可以认为和 1 等同；当它非常接近 0 时，可以认为和 0 等同；否则，就用第三个值表示。这样的三值近似具有可直观解释的优点。

8. 二支决策和三支决策的关系

三支决策可以通过两次二支决策来解释。三支决策的边界域可以有二种解释：一种解释为弱接受，另一种解释为弱拒绝。对于第一种解释，三支决策的正域和边界域的并可以看做是二支决策的正域，这样我们可以先通过二支决策获得正域和负域，然后将二支决策的正域进一步分为三支决策的正域和边界域。图 4(a)给出了这种二支决策与三支决策的关系。类似地，也可以给出第二种解释，如图 4(b)所示。



(a) “接受和弱接受”与“拒绝”的二支决策 + “接受”与“不承诺”的二支决策



(b) “接受”与“拒绝和弱拒绝”的二支决策 + “不承诺”与“拒绝”的二支决策

图 4 二支决策和三支决策的关系

用同样的方法， M 支决策可以通过 $M-1$ 次二支决策获得。虽然 M 支决策可能有更准确的优势，但其可解释性较三支决策为差，且不若三支决策简单。在实际应用中，三支决策也许已足够有效。此外，三支决策还可根据需要进一步细化，以获得更多支的决策。

9. 两状态三支决策

对于两状态的 II 类决策问题，实体有两种状态，即满足或不满足给定条件。当所掌握信息不确定或不完整时，则无法准确地判断实体是否满足给定条件，只能通过实体评价函数进行估计。基于决策粗糙集，我们仅针对 II 类问题进行代价风险分析并给出求解最优 (α, β) 值的方法。对于任一实体 $x \in U$ ，它在客观上存在两种状态，即满足与不满足给定条件，据此可以将实体集 U 划分为两部分，即满足给定条件的实体子集与不满足给定条件的实体子集，分别表示为 X 和 X^c ，由此可以得到 $U = X \cup X^c$ 。当所掌握的信息不确定或不完整时，我们可能获得一个实体的描述。在决策粗糙集中，我们用一个等价关系的等价类 $[x]$ 来表达。由于我们无法确切地给出实体 x 的状态，需要通过实体评价函数对实体状态进行估计。在这种情况下，评价函数可以定义为实体 x 满足或不满足条件 C 的概率。

表 4 两状态决策问题代价矩阵

决策动作	实体的客观状态	
	满足条件: p	不满足条件: n
接受实体: a	λ_{ap}	λ_{an}
拒绝实体: r	λ_{rp}	λ_{rn}
不承诺或延迟决策: n	λ_{np}	λ_{nn}

对应于三支决策，我们用 a, r 和 n 分别表示接受，拒绝和不承诺。假设评价函数定义为实体满足条件 C 的概率，记为 $Pr(X|[x])$ ，基于表 4 给出的代价矩阵，两状态三支决策的代价或风险可分析如下。设风险函数为 $R(\Delta|x)$ ，其中 Δ 表示对 x 的决策动作。风险函数 $R(\Delta|x)$ 可以定义为决策动作 Δ 的风险的数学期望。对表 4 中的三种决策，可以得到相应的风险估计：

接受的风险： $R(a|x) = \lambda_{ap} \cdot Pr(X|[x]) + \lambda_{an} \cdot (1 - Pr(X|[x]))$ ，

拒绝的风险： $R(r|x) = \lambda_{rp} \cdot Pr(X|[x]) + \lambda_{rn} \cdot (1 - Pr(X|[x]))$ ，

不承诺或延迟的风险： $R(n|x) = \lambda_{np} \cdot Pr(X|[x]) + \lambda_{nn} \cdot (1 - Pr(X|[x]))$ 。

在决策问题中，我们总希望做出风险最小的决策。因此，基于风险函数，选择其中风险最小的决策动作：

当满足条件 $R(a|x) \leq R(r|x) \wedge R(a|x) \leq R(n|x)$ 时，选择接受；

当满足条件 $R(r|x) \leq R(a|x) \wedge R(r|x) \leq R(n|x)$ 时，选择拒绝；

当满足条件 $R(n|x) \leq R(a|x) \wedge R(n|x) \leq R(r|x)$ 时，选择不承诺。

假设风险函数满足下面条件：

$$(c0) \quad \lambda_{ap} \leq \lambda_{np} < \lambda_{rp}, \quad \lambda_{rn} \leq \lambda_{nn} < \lambda_{an},$$

$$(c1) \quad \frac{\lambda_{rp} - \lambda_{np}}{\lambda_{nn} - \lambda_{rn}} > \frac{\lambda_{np} - \lambda_{ap}}{\lambda_{an} - \lambda_{nn}}.$$

将 $R(a|x)$ 、 $R(r|x)$ 、 $R(n|x)$ 代入上面的三个不等式，可以得到以下结果：

如果 $Pr(X|[x]) \geq \alpha$ ，选择接受；

如果 $Pr(X|[x]) \leq \beta$ ，选择拒绝；

如果 $\beta < Pr(X|[x]) < \alpha$ ，选择不承诺或延迟决策，

其中，最优 (α, β) 值可计算如下：

$$\alpha = \frac{\lambda_{an} - \lambda_{nn}}{(\lambda_{an} - \lambda_{nn}) + (\lambda_{np} - \lambda_{ap})},$$

$$\beta = \frac{\lambda_{nn} - \lambda_{rn}}{(\lambda_{nn} - \lambda_{rn}) + (\lambda_{rp} - \lambda_{np})}.$$

这表示决策粗糙集所需要的阈值由不同决策的风险决定。

10. 多状态三支决策

设 S 是所有实体的可能状态的集合，且元素个数大于三。状态集合 S 可以有很多形式，下面仅考虑由一个有界全序集定义的状态集，即， S 满足下面两个条件：

(1) S 是基于某一全序关系的全序集合 $(S, \leq)$ ，

(2) S 是一个有界集合，即 S 中存在一个最大元 $\mathbf{1} \in S$ 和一个最小元 $\mathbf{0} \in S$ 。

对任一实体 $x \in U$ ，状态函数值 $s(x)$ 表示实体 x 的状态。状态函数 $s: U \rightarrow S$ 可以解释为评价函数。这样，三支决策可作为一个多值状态函数的三值近似。

在三支决策中， a, r 和 n 分别表示接受，拒绝和不承诺。为了准确地表示三支决策所给出的三值近似，我们引入一个代价函数 $C: S \times \{a, r, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ 。显然，代价函数应满足以下条件：

$$\begin{aligned} C(1, a) &= 0, \\ C(0, r) &= 0, \\ C(1, n) &= C(0, n), \\ s_1 \leq s_2 &\Rightarrow C(s_1, a) \geq C(s_2, a) \wedge C(s_1, r) \leq C(s_2, r). \end{aligned}$$

表 5 给出了多状态决策问题的代价矩阵。对于一个实体，可以选择代价最小的决策，其规则如下：

- 如果 $C(s(x), a) \leq C(s(x), r)$ 且 $C(s(x), a) \leq C(s(x), n)$ ，选择接受；
- 如果 $C(s(x), r) \leq C(s(x), a)$ 且 $C(s(x), r) \leq C(s(x), n)$ ，选择拒绝；
- 如果 $C(s(x), n) \leq C(s(x), a)$ 且 $C(s(x), n) \leq C(s(x), r)$ ，选择不承诺。

给定一个实体的代价函数，我们可以确定所需的一对阈值。关于多状态三支决策的例子，可参见决策阴影集^[16]。

表 5 多状态决策问题代价矩阵

决策动作	实体状态 $s(x)$
接受: a	$C(s(x), a)$
拒绝: r	$C(s(x), r)$
不承诺: n	$C(s(x), n)$

11. 三支决策的几何描述

三支决策的主要结果是将一个实体的论域 U 划分为三个两两不相交的集合，即 POS、BND 和 NEG，并对应于三个集合得到不同的规则。由于有些域可能是空集，从严格意义上讲， $\{\text{POS}, \text{BND}, \text{NEG}\}$ 不一定是 U 的一个划分。为了讨论方便，在不引起歧义的前提下，我们仍称 $\{\text{POS}, \text{BND}, \text{NEG}\}$ 为 U 的一个划分。对应于这三个区域，它们的补集可构造如下：

$$\begin{aligned} \text{POS}^c &= \text{BND} \cup \text{NEG}, \\ \text{NEG}^c &= \text{POS} \cup \text{BND}, \\ \text{BND}^c &= \text{POS} \cup \text{NEG}. \end{aligned}$$

这六个集合之间的关系可以用一个六边形表示，如图 5 所示。

根据二支决策和三支决策的关系，可知正域和负域在三支决策中占有比较重要的地位，因此，我们可以考虑由正域和负域所引出的四个集合 POS, NEG, $\text{POS} \cup \text{BND}$ 和 $\text{BND} \cup \text{NEG}$ ，它们之间的关系可用一个正方形表示，如图 6 所示。该正方形可以看成图 5 中六边形的一个子图。

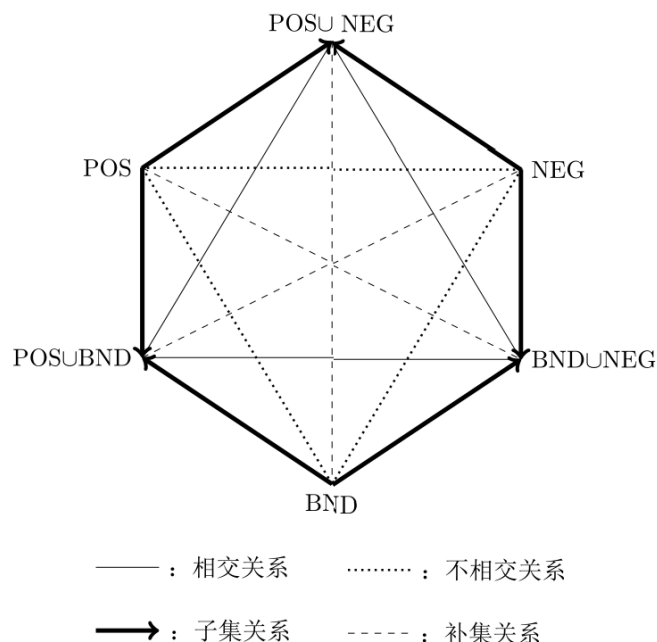


图 5 三支决策中六个集合之间的关系

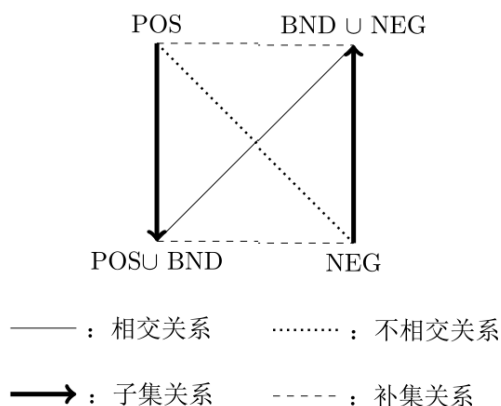


图 6 三支决策中四个集合之间的关系

正方形和六边形给出了三支决策中不同区域之间的紧密关系，这种几何表示将三支决策同经典的亚里士多德对立正方形（Square of Opposition）和 Blanché 的概念六边形组织（Hexagonal Organization of Concepts）联系在一起^[17~20]，为三支决策研究提供了逻辑基础和研究方法。

12. 结论

三支决策的研究是一种新的尝试，欲将众多领域中所用到的决策方法和思想同人类直观的信息处理模式联系在一起，以期提供一个普适的理论。三支决策的研究虽然刚刚开始，却已取得了很多人鼓舞的成果。许多学者的关注和欣然加入，更为该理论的发展注入了新鲜血液、打下了坚实基础。本章通过对三支决策研究中十个相关问题的简单讨论，为进一步研究指出了可能的方向。对于这些还不完全成熟的想法，真诚地欢迎大家提出建议和意见。

参考文献

- [1] Yao Y Y. An outline of a theory of three-way decisions// Proceedings of the RSCTC 2012, LNCS (LNAI) 7413, 2012, 1~17.
- [2] 贾修一，商琳，周献中，梁吉业，苗夺谦，王国胤，李天瑞，张燕平. 三支决策理论与应用. 南京：南京大学出版社，2012.
- [3] 苗夺谦，高灿，张楠. 基于三支决策理论的半监督学习// 贾修一，商琳，周献中，梁吉业，苗夺谦，王国胤，李天瑞，张燕平. 三支决策理论与应用. 南京：南京大学出版社，2012，17~33 .
- [4] 李华雄，周献中，赵佳宝，黄兵. 基于三支决策粗糙集的代价敏感分类方法// 贾修一，商琳，周献中，梁吉业，苗夺谦，王国胤，李天瑞，张燕平. 三支决策理论与应用. 南京：南京大学出版社，2012，34~48.
- [5] 刘盾，李天瑞，梁德翠. 基于决策粗糙集的三支政策决策分析// 贾修一，商琳，周献中，梁吉业，苗夺谦，王国胤，李天瑞，张燕平. 三支决策理论与应用. 南京：南京大学出版社，2012，49~60.
- [6] 贾修一，商琳. 基于三支决策的垃圾邮件过滤// 贾修一，商琳，周献中，梁吉业，苗夺谦，王国胤，李天瑞，张燕平. 三支决策理论与应用. 南京：南京大学出版社，2012，61~79.
- [7] 赵姝，张燕平. 构造性覆盖算法的三支决策// 贾修一，商琳，周献中，梁吉业，苗夺谦，王国胤，李天瑞，张燕平. 三支决策理论与应用. 南京：南京大学出版社，2012，80~102.
- [8] 姚静涛，张燕. 基于博弈粗糙集的三支决策// 贾修一，商琳，周献中，梁吉业，苗夺谦，王国胤，李天瑞，张燕平. 三支决策理论与应用. 南京：南京大学出版社，2012，103~117.
- [9] 邓晓飞，王洪凯，姚一豫. 基于三支决策的自适应粗糙集近似// 贾修一，商琳，周献中，梁吉业，苗夺谦，王国胤，李天瑞，张燕平. 三支决策理论与应用. 南京：南京大学出版社，2012，118~130.

- [10] Miller G A. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 1955, 101: 343~352.
- [11] Cowan N. The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences*, 2001, 24: 87~114.
- [12] Mitchell T M. *Machine Learning*. New York: McGraw Hill, 1997.
- [13] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets. *Information Sciences*, 2010, 180: 341~353.
- [14] Yao Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models. *Information Sciences*, 2011, 181: 1080~1096.
- [15] Yao Y Y. Two semantic issues in a probabilistic rough set model. *Fundamenta Informaticae*, 2011, 108: 249~265.
- [16] Deng X F, Yao Y Y. Decision-Theoretic Shadowed Sets. Manuscript, 2013.
- [17] Dubois D, Prade H. From Blanché's hexagonal organization of concepts to formal concept analysis and possibility theory. *Logica Universalis*, 2012, 6: 149~169.
- [18] Schang F. Oppositions and opposites// Béziau J Y, Jacquette D. *Around and Beyond the Square of Opposition*, Heidelberg: Springer Basel, 2012, 147~173.
- [19] Ciucci D, Dubois D, Prade H. Oppositions in rough set theory. *Proceedings of RSKT 2012, LNCS (LNAI) 7414*, 2012, 504~513.
- [20] Béziau J Y. The new rising of the square of opposition // Béziau J Y, Jacquette D. *Around and Beyond the Square of Opposition*, Heidelberg: Springer Basel, 2012, 3~19.