

三支决策

姚一豫 (University of Regina)

1. 引言

三支决策理论是传统二支决策理论的拓广^[1]。二支决策只考虑到接受与拒绝两种选择, 但是在实际应用中, 由于信息的不精确性或不完整性, 常常无法做到接受或拒绝, 即难以接受或不接受, 也难以拒绝或不拒绝。在这种情况下, 人们常常不自觉地使用三支决策。具体的说, 三支决策比传统二支决策多了一个不承诺选择, 当信息不足以支持接受, 也不足以支持拒绝时, 采用第三种选择, 即不承诺。

二支决策和三支决策各有优缺点, 在实际决策过程中, 可以根据具体应用采用不同的决策模型。在信息充分或获取信息代价较小时, 采用二支决策。二支决策使得决策过程迅速、简洁。在信息不足, 或获取信息需要一定代价时, 适合使用三支决策。在使用三支决策时, 也需要根据具体情况灵活应用。如果决策结果要求是二支的, 即最终是接受或拒绝, 可以在决策过程中采用三支决策。也就是说, 三支决策的不承诺决策可以和延迟决策联系起来, 通过进一步观察、获得足够的信息, 从而将不承诺改变为接受或拒绝, 例如论文的评审过程。如果信息的观察和获取需要付出一定的代价, 例如, 时间、资金等资源, 那么就需要权衡利弊, 折中考虑决策的性能指标, 如准确性、错误率等, 和获取信息所需要的代价。在这种情况下, 三支决策模型提供了一个很好的权衡资源和效益的决策框架。

三支决策理论是在粗糙集^[2,3]和决策粗糙集^[4-9]研究中提出的, 其主要目的是为粗糙集三个域提供合理的语义解释^[10-13]。粗糙集模型的正域、负域和边界域可以解释为接受、拒绝和不承诺三种决策的结果。从正、负域中可以分别获取接受、拒绝规则, 当无法使用接受或拒绝规则时, 则采取不承诺决策。许多学者研究和拓展了三支决策理论, 并将其应用于多个学科领域^[14-49]。

通过进一步研究, 我们发现三支决策广泛地应用于多个学科和领域, 包括医疗诊断^[50-54]、社会判断理论^[55]、统计学中的假设检验^[56]、管理学^[57-60]和论文评审^[61]。同时我们还发现, 虽然每个学科都有各自的三支决策模型, 但仍然没有一个统一的三支决策理论。因此, 本章介绍一个三支决策的理论模型^[1], 并在该理论框架下详细地分析基于概率粗糙集的三支决策。

2. 三支决策的优势及应用

我们改编了 French^[62]书中提到 Savage^[63]给出的一个故事, 以说明三支决策的必要性和优势。午餐想吃煎鸡蛋, 厨房里有 6 个鸡蛋。妻子在碗里已经打好了 5 个鸡蛋, 丈夫自告奋勇过来帮忙。丈夫是一个决策论爱好者, 当他拿起最后一个鸡蛋, 两个问题闪现在脑中: 这个鸡蛋是个好鸡蛋吗? 什么样的决策模型最合理?

普通的二支决策对应两种选择: 鸡蛋直接打到碗里或者扔掉。将鸡蛋打到碗里是第一种选

择, 这种选择的危险是: 如果第 6 个鸡蛋是个坏鸡蛋, 那么前面的 5 个鸡蛋就全浪费了; 扔掉是第二种选择, 这种选择的危险是: 如果第 6 个鸡蛋是个好鸡蛋, 那么这个鸡蛋就白白浪费了。表 1 给出不同决策的代价。如果第 6 个鸡蛋是好鸡蛋的可能性比较大 (例如, 概率大于等于 α), 那么将鸡蛋直接打到碗里是个不错的选择; 如果第 6 个鸡蛋是好鸡蛋的可能性比较小 (例如, 概率小于等于 β), 那么将鸡蛋扔掉是个不错的选择; 如果第 6 个鸡蛋是好鸡蛋的可能性既不小也不大 (例如, 概率大于 β 且小于 α) 那么打到碗里或者扔掉都显得不理想。也就是说, 如果强制性地做二支决策, 每种选择都不合理。

表 1: 二支决策的代价矩阵

动作 \ 状态	好鸡蛋	坏鸡蛋
打到碗里	不浪费鸡蛋, 做成 6 个鸡蛋的鸡蛋饼	浪费 5 个鸡蛋, 做不成鸡蛋饼
扔掉	浪费 1 个鸡蛋, 做成 5 个鸡蛋的鸡蛋饼	不浪费鸡蛋, 做成 5 个鸡蛋的鸡蛋饼

看到丈夫拿着鸡蛋发呆的样子, 妻子询问原因。当听完丈夫的分析, 妻子马上说: “这还不容易解决? 再拿一个碗, 把鸡蛋打到里面。看看是好的还是坏的。” 妻子的解决方案给出了一个三支决策方法, 其代价用表 2 给出。第三种选择的危险仅仅是多洗一个碗。当鸡蛋是好是坏的可能性几乎一样时, 多洗一个碗可能是最优的选择。

表 2: 三支决策的代价矩阵

动作 \ 状态	好鸡蛋	坏鸡蛋
打到碗里	不浪费鸡蛋, 做成 6 个鸡蛋的鸡蛋饼	浪费 5 个鸡蛋, 做不成鸡蛋饼
扔掉	浪费 1 个鸡蛋, 做成 5 个鸡蛋的鸡蛋饼	不浪费鸡蛋, 做成 5 个鸡蛋的鸡蛋饼
打到另一个碗里	不浪费鸡蛋, 做成 6 个鸡蛋的鸡蛋饼, 多洗一个碗	不浪费鸡蛋, 做成 5 个鸡蛋的鸡蛋饼, 多洗一个碗

通过日常生活中的这个简单例子, 读者不难体会出三支决策相对于二支决策的优越性。事实上, 在解决实际问题的过程中, 人们常常用到三支决策的思想和方法。下面简单地介绍三支决策在不同学科及领域中的应用。

Wald^[56]介绍并研究了一个基于三支决策的序列假设验证框架。三支决策用于试验的任何阶段, 即: 接受被检验的假设, 拒绝假设和通过进一步验证再下结论。如果能够接受或拒绝被验证假设, 过程终止; 否则, 继续进行试验; 试验过程直到得出接受或拒绝时结束。

序列三支决策的思想广泛地用于医疗诊断和决策中。Schechter^[53]将Wald的方法用于医疗诊断中。Pauker和Kassirer^[52]提出了基于“检查”阈值和“检查-治疗”阈值的医疗决策方法(在这里“检查”阈值小于“检查-治疗”阈值):如果患疾病的可能性小于“检查”阈值,那么不需要采取任何检查和治疗;如果患疾病的可能性大于“检查-治疗”阈值,那么需要进行治疗;如果患疾病的可能性介于两个阈值之间,那么需要进一步检查,并根据检查结果进行诊断。该模型已被很多学者采纳^[50,54]。Lurie等^[51]讨论了二支决策和三支决策在医疗中的应用及估计阈值的方法。

三支决策思想也用于管理学中。Weller^[61]讨论了论文评审过程中所涉及到的序列三支决策。编辑通常会根据审稿专家的意见,对论文稿件进行三支决策:接受,退稿或者修改。论文最后的结果取决于进一步的审稿结论。Goudey^[58]研究了基于统计的三支决策在环境管理领域中的应用,对于一个项目可以有三种决策:没有问题,该项目可继续进行;有问题,停止该项目;如果不能做出前两种决策,则继续考察该项目。Matthews和Bennett^[59]将类似的思想用于大学中的学科设置管理。Woodward和Naylor^[60]讨论了统计进程控制中的三支贝叶斯决策方法,他们利用后验概率的一对阈值对相关统计过程做一个三阶段决策:接受初始设置并不需调整;暂不需调整初始设置但是要继续观察;需要调整进程并继续检查。Forster^[57]讨论基于三支决策(接受,拒绝和推迟判断)的模型选择标准,在某些情况下推迟判断可能是比较合理的推荐。

三支决策的思想也可以应用到群体决策中。群体决策是为充分发挥集体的智慧,由多人共同参与决策的整体过程。群体决策之所以具有科学性,原因之一是群体决策成员在决策中处于同等的地位,可以充分地发表个人见解。假定每位成员针对某问题的同一解决方案进行表决,且均做普通的二支决策(同意或者不同意)。如果成员一致同意或者大部分同意该方案(例如,通过率大于等于 α),那么可以决定采用该方案;如果成员一致反对或者大部分反对该方案(例如,通过率小于等于 β),那么可以决定放弃该方案;如果成员对该方案意见相对不统一(例如,通过率大于等于 β ,且小于等于 α),那么可以暂缓对该方案的处理,等待继续调查研究后再做决定。

更多应用三支决策的例子包括自然语言中音调识别^[64]和语音识别^[65],数据库查询优化中数据包的选择^[66],数据分析^[67,68]和文本蕴涵识别(textual entailment recognition)^[69]等。

基于决策粗糙集^[4-9],很多学者讨论了三支决策方法和应用。在《粗糙集理论与方法》一书中,张文修、吴伟志、梁吉业和李德玉首先将决策粗糙集理论介绍给了国内读者^[49]。姚静涛和Herbert将决策粗糙集和博弈粗糙集相结合并在此基础上研究了三支决策^[17,18]。周献忠、李华雄及其研究小组给出了决策粗糙集一个多视角解释,讨论了决策粗糙集属性约简问题及应用^[21-23]。李天瑞、刘盾及其研究小组讨论了多类决策粗糙集和应用,并将三支决策应用到投资决策中^[30-35]。苗夺谦、Lingras及其研究小组将决策粗糙集同聚类分析结合起来,并利用决策粗糙集对粗分类质量进行了量化和解释,对粗分类相关问题进行了深入研究^[27-29]。杨晓平等在不完备信息系统和多智能体系统中研究了基于决策粗糙集的三支决策^[38,39]。商琳和贾修一等讨论了将三支决策应用于垃圾邮件过滤问题,并提出了决策粗糙集中求三支决策中阈值的自适应算法和模拟退火算法^[19,20,47,48]。王国胤和于洪等讨论了决策粗糙集在聚类中的应用,也讨论了决策粗糙集的研究

现状及新趋势^[40-42]。Li 等将决策粗糙集用到信息检索和信息过滤中^[25,26]。Greco 等将决策粗糙集和基于优势关系的粗糙集结合起来^[70]。周冰等^[44]、赵文清等^[71]将决策粗糙集模型应用到垃圾邮件过滤过程中，不同于一般的二元分类，每个邮件被分到下面三个文件夹中的某一个：正常邮件，垃圾邮件和可疑邮件。决策粗糙集理论及三支决策理论的最新研究进展可参见文献[72~85]。

3. 一个三支决策的理论

在前面讨论的基础上，本节给出了一个三支决策的理论，其基本思想是在实体评价函数上引入两个阈值，并构造所需的三个域。

3.1 三支决策的描述

设 U 是有限、非空实体集或者决策方案集， C 是有限条件集，条件集可能包含指标（criteria）、目标（objectives）或约束（constraints）。决策任务是基于给定条件对每一个实体 $x \in U$ 做出相应的决策。

条件集 C 给出了决策的依据。根据不同种类的条件，可以构造不同的评价函数。给定一个实体，它的评价函数值称为决策状态值（decision status value），也可以解释为实体的效用值。根据实体对条件的满足性和评价函数的特征，至少可以考虑表 3 中给出的四类决策问题。二值的评价函数给出了二支决策，对于类 I，实体的满足性是二值的，决策也是二支的，给出了比较理想的匹配；对于类 III，实体的满足性是多值的，二支决策仅给出了一种近似。多值评价函数也可以获得二支决策，这需要引入一个阈值，当决策状态值大于或等于阈值，采取一种决策，称为接受决策；当决策状态值小于阈值时，采取另一种决策，称为拒绝决策。二支决策将集合 U 分为两个不相交的域，称为正域和负域，分别记为POS和NEG。

表 3：四类决策问题

实体的满足性 \ 评价函数	二值	多值
	类 I	类 II
二值		
多值	类 III	类 IV

考虑类 II 对应的决策问题，虽然一个实体客观上满足或不满足给定条件，但当信息不确定或不完整时，则可能无法确定实体是否属于满足条件。也就是说，评价函数是对实体满足条件的一种估计。由于这种估计体现了不确定性，采用二支决策可能比较困难：在评价

函数值既不很高也不很低时, 不论是接受或拒绝都显得不合理。这就要求引入三支决策, 给定一对阈值 α 和 β : (a) 当实体决策状态值大于或等于 α 时, 接受该实体; (b) 当决策状态值小于或等于 β 时, 拒绝该实体; (c) 当决策状态值在 α 和 β 之间时, 既不拒绝也不接受, 而选择不承诺决策。第三项决策也可以看作是延迟决策, 需要进一步观察或者获得更多信息。同样的讨论也适用于类 IV 对应的决策问题。

三支决策可以如下形式化描述:

三支决策: 设 U 是有限、非空实体集, C 是有限条件集。基于条件集 C , 三支决策的主要任务是将实体集 U 分为三个两两不相交的域, 分别记为POS、NEG和BND, 分别称为正域、负域和边界域。

对应于三个域, 可以构造三支决策规则。以前的研究中, 我们使用三种类型的规则, 分别称为接受、拒绝和不承诺规则。在实际应用中, 只有接受决策和拒绝决策具有实际意义, 同时也充分地给出了三支决策。对于某一个实体, 如果既不能使用接受规则, 也不能使用拒绝规则, 那么就选用不承诺决策, 因而不需要不承诺规则。在某些情况下, 也很难构造不承诺规则。因此, 只需要考虑接受和拒绝规则。

给定一对阈值 α 和 β , 可以将所有决策状态值分成三个区, 大于 α 的决策状态值称为指定的接受值区, 小于 β 的决策状态值称为拒绝值区, 介于两者之间的决策状态值为不承诺值区。三支决策理论必须考虑下面关于评价函数和指定值的问题:

1. 评价函数值域的构造和解释。一般来讲, 在评价函数的值域上可以建立某种序关系, 这样可以通过决策状态值比较实体满足条件的程度。比如, 评价函数的值域可以是偏序集、格、有限个等级(grades)、整数的集合、区间值和实数的集合。社会评判理论(social judgment theory)^[55]中使用接受、拒绝和不承诺度(latitudes of acceptance, rejection and noncommitment)与三支决策中的评价函数值域非常相似。

2. 评价函数的构造和解释。评价函数取决于条件集合。对于接受和拒绝, 可能是相互独立的评价或相同的评价。根据具体应用, 评价函数的构造和解释可以基于更直观和实际操作的概念, 例如, 代价、风险、错误、利润、效益、用户满意度和投票等。

3. 指定接受值区、拒绝值区的构造和解释。指定接受值区和拒绝值区必须反映决策时直觉上对于接受和拒绝的理解。例如, 不应同时接受和拒绝, 这就要求指定接受值区和拒绝值区是不相交的。指定接受值区应使得决策具有单调性, 即, 如果接受实体 x , 那么就接收所有决策状态值大于或等于 x 的实体。

下一节给出了一个基于全序的评价函数及其对应的三支决策模型。有关三支决策理论进一步的讨论, 可参见文献^[1]。

3.2 基于全序评价函数的三支决策

设 $(L, \leq)$ 是一个全序关系集, 其中 $\leq$ 是全序关系, 即 $\leq$ 是自反、反对称和传递的关系, 且集合 L 中任意两个元素是可比较的。例如, L 可以是实数集或者单元区间集 $[0,1]$, $\leq$ 是一个小于等于关系。基于全序关系及一对阈值, 一个三支决策模型定义如下。

定义. 设 $(L, \leq)$ 是一个全序集, 其中 $\leq$ 是一个全序关系, α, β 是满足条件 $\beta < \alpha$ 的两个元素, 即 $(\beta \leq \alpha) \wedge \neg(\alpha \leq \beta)$, 集合 $L^+ = \{t \in L \mid t \geq \alpha\}$ 表示指定接受值区, 集合 $L^- = \{b \in L \mid b \leq \beta\}$ 表示指定拒绝值区。给定评价函数 $v: U \rightarrow L$, 三支决策可以定义为:

$$\text{POS}_{(\alpha, \beta)}(v) = \{x \in U \mid v(x) \geq \alpha\},$$

尽管基于全序关系的评价函数有一定的局限性, 但是在计算上却非常方便, 即三个域可以简单地通过阈值对得出。事实上, 许多相关研究都使用了全序关系。

3.3 三支决策的性能分析

三支决策的有效性取决于所选用的评价函数及阈值。根据对评价函数的不同语义解释, 可以得出不同的三支决策模型。因而, 每个模型的性能需要通过不同的指标度量和分析。本节分析一个基于实体两种状态的三支决策模型, 即表 3 中类 II 的决策问题。

给定一个条件的集合, 假设现实世界中任意一个实体都处于两种状态之一, 即, 满足或不满足这些条件, 在表 4 中分别用 C 和 C^c 表示。例如, 一个人患有某种疾病或不患有该疾病; 一个实体具有某种属性或不具有某种属性。由于信息的不充分性或不确定性, 不可能精确地判定实体的真正状态, 因此用一个评价函数来估计实体是否满足条件。评价函数的值可以解释为可信度或人的自信度, 前者是客观度量而后者是主观度量。当评价函数的值高于一个阈值时, 接受实体满足条件; 当评价函数值低于另一个阈值时, 拒绝该实体满足条件 (即, 接受该实体不满足条件); 当评价函数值介于这两个阈值之间时, 既不接收也不拒绝, 采用不承诺的态度。表 4 详细地描述了三种不同的决策会引起不同的后果和错误。通过表中的元素, 可以给出三支决策有效性的度量^[12]。

表 4 中, 行表示三种决策动作, 即接受、拒绝和不承诺; 列表示两种状态, 即满足条件和不满足条件; 每个单元格给出不同状态下不同决策的结果。表中的每一行给出了一个决策的正确和错误结果。例如, 在“接受”行中, $\text{POS}_{(\alpha, \beta)}(C) \cap C$ 表示正确接受的实体集, 即实体满足条件同时被接受; $\text{POS}_{(\alpha, \beta)}(C) \cap C^c$ 表示错误接受的实体集, 即实体不满足条件但被接受。这里为了讨论方便, 将表示 C 的评价函数 v_C 简记为 C 。“拒绝”和“不承诺”两行可以类似解释。表中的每一列给出了三支决策的结果。例如, 在“满足条件”列中, $\text{POS}_{(\alpha, \beta)}(C) \cap C$ 给出正确接受的实体集, $\text{NEG}_{(\alpha, \beta)}(C) \cap C$ 给出错误拒绝的实体集, $\text{BND}_{(\alpha, \beta)}(C) \cap C$ 给出正例不承诺的实体集。“不满足条件”列也可以类似解释。在表 4 中, $|\cdot|$ 表示一个集合的势。

表 4: 三支决策分类错误表

	C (满足条件)	C^c (不满足条件)	总和
接受	正确接受: $ \text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C $	错误接受: $ \text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C^c $	$ \text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C) $
拒绝	错误拒绝: $ \text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C $	正确拒绝: $ \text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C^c $	$ \text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C) $
不承诺	正例不承诺: $ \text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C $	负例不承诺: $ \text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C^c $	$ \text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C) $
总和	$ C $	$ C^c $	$ U $

对表 4 中单元格的值, 既可以对行也可以对列进行相应的归一化处理, 其量化结果可度量三支决策的性能。用“总和”行中实体集 U 的势, 对“总和”列中三个域的势归一化处理, 可以给出如下三种关于三支决策的度量函数:

$$\begin{aligned} \text{接受率: } & \frac{|\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)|}{|U|}, \\ \text{拒绝率: } & \frac{|\text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C)|}{|U|}, \\ \text{不承诺率: } & \frac{|\text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C)|}{|U|}. \end{aligned}$$

这三个度量函数分别表示被接受的实体占整个实体集的比例, 被拒绝的实体占整个实体集的比例和不承诺决策的实体占整个实体集的比例, 分别称之为接受率, 拒绝率和不承诺率。它们的和为 1, 因此, 当接受率高时, 拒绝率和不承诺率之和则较小, 其它情况亦然。

用“总和”列中对应单元的值, 即 $|\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)|$ 、 $|\text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C)|$ 和 $|\text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C)|$, 对表 4 中“接受”、“拒绝”和“不承诺”三行进行归一化, 可以表示决策结果的正确率与错误率, 相应的三种度量函数可以定义为:

$$\begin{cases} \text{正确接受率: } \frac{|C \cap \text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)|}{|\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)|}, \\ \text{错误接受率: } \frac{|C^c \cap \text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)|}{|\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)|}; \end{cases}$$

当正域、负域或边界域为空时, 相应的正确率和错误率分别为 1 和 0。对于每个域来讲, 满足条件和不满足条件的实体集将该域分为不相交的两部分, 例如, $C \cap \text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)$ 和 $C^c \cap \text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)$ 。因此, 对于接受决策, 正确接受率和错误接受率之和为 1。当正确率较高或为 1 时, 错误率较低或为 0。对于拒绝和不承诺两种决策, 正确率和错误率之间的关系可以类似解释。

类似地, 也可以用“总和”行中对应单元格的值, 即 $|C|$ 和 $|C^c|$, 对“满足条件”、“不满足条件”及“总和”列进行归一化, 得到如下两组度量函数:

$$\begin{cases} \text{满足_接受率: } \frac{|C \cap \text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)|}{|C|}, \\ \text{满足_拒绝率: } \frac{|C \cap \text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C)|}{|C|}, \\ \text{满足_不承诺率: } \frac{|C \cap \text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C)|}{|C|}; \end{cases}$$

这两种度量可以看作是接受率、拒绝率和不承诺率分别在满足条件的实体集和不满足条件的实体集上的分配，其关系如下：

$$\text{接受率} = \frac{|C|}{|U|} \text{满足_接受率} + \frac{|C^c|}{|U|} \text{不满足_接受率},$$

对于满足条件的实体，分别采取接受、拒绝和不承诺三种决策动作，其结果是三个两两不相交的集合，即 $\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C$ ， $\text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C$ 和 $\text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C$ 三个集合，且它们的并为 C 。第一组的函数给出了满足-接受率，满足-拒绝率和满足-不承诺率，它们的和为 1，即对于满足条件的实体集，如果被拒绝的实体较多或全部被拒绝，则被接受或不承诺的实体较少或不存在。对于不满足条件的实体集，对应的三个决策动作可以用第二组函数度量。

三类度量函数并不是相互独立而是相互关联的。一个好的三支决策应具有高的正确接受率（即低错误接受率）和高的正确拒绝率（即低的错误拒绝率），同时，也具有高的满足-接受率（即低的满足-拒绝或不承诺率）和高的不满足-拒绝率（即低的不满足-接受或不承诺率）。它们通常具有反比关系，高的满足-接受率通常可以通过设置较低的 α 阈值获得，但可能会导致较低的正确接受率；高的不满足-拒绝率可以通过设置较高的 β 阈值获得，但可能会导致低正确拒绝率。阈值的选择实际上是不同度量函数的取舍或折中。

4. 三支决策与粗糙集

粗糙集和决策粗糙集是典型的三支决策模型，前者给出了一个定性的模型，而后者给出了一个定量模型。决策粗糙集使用条件概率作为评价函数，这就较容易地将评价和前一节所讨论的各种度量函数联系起来了。

4.1 基于阈值对的三个概率区间

设 U 是有限实体集，关系 $E \subseteq U \times U$ 是实体集 U 上的等价关系，即 E 是自反的、对称的和传递的。包含实体 x 的 E 的等价类记为 $[x]_E = [x] = \{y \in U \mid xEy\}$ 。所有等价类的集合记为 $U/E = \{[x]_E \mid x \in U\}$ ，称为商集，也称作对实体集的划分。 $C \subseteq U$ 是实体集的一个子集， $Pr(C|[x])$ 表示实体 y 属于等价类 $[x]$ 时， y 属于集合 C 的条件概率。概率粗糙集的主要结果是在决策粗糙集模型的基础上提出并研究的。

设阈值对 (α, β) 满足条件 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ ，则 (α, β) -概率粗糙集中，集合 C 的下近似和上近似可以表示为：

$$\underline{apr}_{(\alpha,\beta)}(C) = \cup \{ [x] \in U/E \mid Pr(C|[x]) \geq \alpha \},$$

根据上、下近似, 概率粗糙集正、负和边界域分别定义为:

$$\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C) = \underline{\text{apr}}_{(\alpha,\beta)}(C)$$

其中, 上近似 $\overline{\text{apr}}_{(\alpha,\beta)}(C)$ 的补表示为 $(\overline{\text{apr}}_{(\alpha,\beta)}(C))^c = U - \overline{\text{apr}}_{(\alpha,\beta)}(C)$ 。三个概率区间是两两不相交的, 并且它们的并集是实体集 U 。三支决策和三支分类给出了三个概率区间的语义解释。

4.2 阈值和分类错误率

设 C 是 U 的一个子集, 并表示一个概念的外延, 等价类 $[x]$ 包含所有与实体 x 具有相同描述的实体。条件概率 $Pr(C|[x])$ 可以看作是该类实体属于外延 C 的置信度。在这种情况下, 3.3 节提到的错误分类率可以和条件概率 $Pr(C|[x])$ 联系起来。

如果实体 y 与 x 具有相同的描述, 并且 y 属于 C 的置信度大于等于 α , 即 $Pr(C|[x]) \geq \alpha$, 那么选择接受。当接受 $[x]$ 的所有实体时, 可能导致错误。由于 $[x] \cap C^c$ 是该等价类中不属于 C 的实体, 错误接受率可定义为^[12]:

$$IAE([x], C) = \frac{|[x] \cap C^c|}{|[x]|} = 1 - Pr(C|[x]).$$

错误接受率 $IAE([x], C) \leq 1 - \alpha$ 可以由条件 $Pr(C|[x]) \geq \alpha$ 推出, 即错误接受率小于等于 $1 - \alpha$ 。正域的错误接受率为:

$$IAE(\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C), C) = \frac{|\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C^c|}{|\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)|}$$

公式 $|[x]|/|\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)|$ 是等价类 $[x]$ 在正域 $\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)$ 中所占的比例。公式 $IAE(\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C), C)$ 可以看作是所有等价类在正域的错误接受率的期望值, 该期望值最大为 $1 - \alpha$ 。

设等价类 $[x]$ 属于 C 的置信度 $Pr(C|[x]) \leq \beta$, 根据该条件, 可以推出负域的错误拒绝率, 定义为:

$$IRE(\text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C), C) = \frac{|\text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C|}{|\text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C)|}$$

类似地, 负域的错误拒绝率 $IRE(\text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C), C)$ 的最大值为 β 。

当置信度太低不足以支持接受, 或者太高不足以支持拒绝, 则选择不承诺。边界域 $\text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C)$ 有两类错误, 分别称为正例不承诺和负例不承诺, 分别记为 $NPE([x], C)$ 和 $NNE([x], C)$ 。也就是说, 未将属于 C 的实体分类到正域的错误和未将不属于 C 的实体分类到负域的错误。这两种错误率可以分别定义为:

$$NPE(\text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C), C) = \frac{|\text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C|}{|\text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C)|}$$

$$NNE(\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C), C) = \frac{|\text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C) \cap C^c|}{|\text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C)|}$$

Pawlak 粗糙集模型可以看成是 $\alpha = 1, \beta = 0$ 的特殊概率粗糙集模型, 并且接受和拒绝决策的错误率都是 0, 即 $IAE(\text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C), C) = 0$ 和 $IRE(\text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C), C) = 0$ 。当不确定时, 选择不承诺, 这使得 $NPE([x], C)$ 和 $NNE([x], C)$ 的值增大。由于不容忍错误接受和错误拒绝, Pawlak 边界域可能会比较大。相对的, 概率粗糙集模型允许一定程度的错误, 因此其边界域可能相对较小。

根据实际应用中对 $1 - \alpha$ 和 β 的解释以及对错误的不同容忍程度, 用户可以选择合适的阈值对 (α, β) 。但是, 不同的决策有时和不同的代价有关。基于代价的解释将决策粗糙集模型中给出。

4.3 阈值和分类代价

阈值和分类代价的关系可以用贝叶斯决策理论解释。设 $\Omega = \{C, C^c\}$ 表示两种状态的集合, 其中状态 C 表示实体是集合 C 的成员, 状态 C^c 表示实体不是集合 C 的成员, 为方便讨论, 本章使用集合 C 表示集合本身及其对应的状态。每种状态对应三种决策动作, 这三种动作的集合记为 $A = \{a_P, a_N, a_B\}$, 其中 a_P, a_N 和 a_B 分别表示对实体 x 所进行的分类动作, 即决定 x 在正域 $x \in \text{POS}_{(\alpha,\beta)}(C)$, 决定 x 在负域 $x \in \text{NEG}_{(\alpha,\beta)}(C)$ 和决定 x 在边界域 $x \in \text{BND}_{(\alpha,\beta)}(C)$ 。因此, 可以得出表 5 中的 3×2 矩阵表示。如果一个实体属于集合 C , 则 $\lambda_{PP}, \lambda_{NP}$ 和 λ_{BP} 分别表示采取三种决策 a_P, a_N 和 a_B 的代价; 如果一个实体不属于集合 C , 则 $\lambda_{PN}, \lambda_{NN}$ 和 λ_{BN} 表示做出决策 a_P, a_N 和 a_B 的代价。

表 5: 决策代价表

	$C(P)$	$C^c(N)$
a_P	λ_{PP}	λ_{PN}
a_N	λ_{NP}	λ_{NN}
a_B	λ_{BP}	λ_{BN}

基于贝叶斯决策理论, 阈值对 (α, β) 可以通过计算如下总的决策代价函数来确定:

$$R(\alpha, \beta) = R_P(\alpha, \beta) + R_N(\alpha, \beta) + R_B(\alpha, \beta),$$

其中,

$$R_P(\alpha, \beta) = \sum_{Pr(C|[x]) \geq \alpha} (\lambda_{PP} Pr(C|[x]) + \lambda_{PN} Pr(C^c|[x])) Pr([x]),$$

分别表示接受, 拒绝和不承诺三种决策的代价。公式 $R(\alpha, \beta)$ 累积计算所有等价类的决策代价。

假设决策代价表中的值满足以下条件:

$$(c_1) \quad \lambda_{PP} < \lambda_{BP} < \lambda_{NP}, \quad \lambda_{NN} < \lambda_{BN} < \lambda_{PN},$$

那么, 代价函数 $R(\alpha, \beta)$ 的最小值所对应的阈值对 (α, β) 可以表示为:

$$\alpha = \frac{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN})}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})},$$

$$\beta = \frac{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN})}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})},$$

其中, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ 。不难看出, 可以通过代价函数计算合适的阈值对。

此外, 基于博弈论的粗糙集模型^[17,18]和基于信息熵的粗糙集模型^[86]也可以用于确定和计算合适的阈值对。决策粗糙集模型中用到的条件概率可以通过平凡贝叶斯粗糙集模型^[87]或回归分析计算^[32]。

5. 结论

三支决策具有非常强的普适性, 不仅能解释概率粗糙集的主要研究结果, 也能广泛地应用于不同的学科和领域。三支决策理论拓广了二支决策, 为决策论的研究提出了新问题和新方法。通过使用不同的评价函数, 三支决策可用于多指标决策、多目标决策、约束条件下决策和群决策。第三种决策选择, 即不承诺, 给出了解决信息或知识的不确定性、不完整性或随机性的有效方法。当证据不足时, 采用不承诺态度可能会使风险或代价最小。与二支决策不同, 在信息或证据不足的情况下三支决策要求获取更多信息或证据, 从而将不承诺转换为接受或拒绝。三支决策理论的进一步研究可能会产生更多成果和应用。

参考文献

- [1] Yao Y Y. An outline of a theory of three-way decisions// Proceedings of the 8th international RSCTC conference, 2012.
- [2] Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341~356.
- [3] Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [4] Yao Y Y, Wong S K M, Lingras P. A decision-theoretic rough set model// The 5th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems, 1990.
- [5] Yao Y Y, Wong S K M. A decision theoretic framework for approximating concepts. International Journal of Man-machine Studies, 1992, 37: 793~809.
- [6] Yao Y Y. Probabilistic approaches to rough sets. Expert Systems, 2003, 20: 287~297.
- [7] Yao Y Y. Probabilistic rough set approximations. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 49: 255~271.
- [8] 李华雄, 周献中, 李天瑞, 王国胤, 苗夺谦, 姚一豫. 决策粗糙集理论及其研究进展. 北京: 科学出版社, 2011.
- [9] 姚一豫. 决策粗糙集研究探讨// 李华雄, 周献中, 李天瑞, 王国胤, 苗夺谦, 姚一豫. 决策粗糙集理论及其研究进展. 北京: 科学出版社, 2011.

- [10] Yao Y Y. Three-way decision: An interpretation of rules in rough set theory// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2009, 2009, LNCS (LNAI) 5589: 642~649.
- [11] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets. Information Sciences, 2010, 180: 341~353.
- [12] Yao Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models. Information Sciences, 2011, 181: 1080~1096.
- [13] Yao Y Y. Two semantic issues in a probabilistic rough set model. Fundamenta Informaticae 108: 249~265, 2011.
- [14] Azam N, Yao J T. Multiple criteria decision analysis with game-theoretic rough sets// Proceedings of the 8th International RSCTC conference, 2012.
- [15] Grzymala-Busse J W. Generalized parameterized approximations// Proceedings of the 6th International conference on Rough Sets and Knowledge Technology, 2011, LNCS (LNAI) 6954: 136~145.
- [16] Grzymala-Busse J W, Yao Y Y. Probabilistic rule induction with the LERS data mining system. International Journal of Intelligent Systems, 2011, 26: 518~539.
- [17] Herbert J P, Yao J T. Learning optimal parameters in decision-theoretic rough sets// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2009, 2009, LNCS (LNAI) 5589: 610~617.
- [18] Herbert J P, Yao J T. Game-theoretic rough sets. Fundamenta Informaticae, 2011, 108: 267~286.
- [19] Jia X Y, Li W W, Shang L, Chen J J. An optimization viewpoint of decision-theoretic rough set model// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011, 2011, LNCS (LNAI) 6954: 457~465.
- [20] Jia X Y, Zhang K, Shang L. Three-way decisions solution to filter spam email: An empirical study// Proceedings of the 8th international RSCTC conference, 2012.
- [21] Li H X, Zhou X Z. Risk decision making based on decision-theoretic rough set: A three-way view decision model. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2011, 4: 1~11.
- [22] Li H X, Zhou X Z, Zhao J B, Huang B. Cost-sensitive classification based on decision-theoretic rough set model// Proceedings of the 8th international RSCTC conference, 2012.
- [23] Li H X, Zhou X Z, Zhao J B, Liu D. Attribute reduction in decision-theoretic rough set model: A further investigation// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011, 2011, LNCS (LNAI) 6954: 466~475.
- [24] Li W, Miao D Q, Wang W L, Zhang N. Hierarchical rough decision theoretic framework for text classification// Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Cognitive

- Informatics, 2010.
- [25] Li Y F, Zhang C Q, Swanb J R. Rough set based model in information retrieval and filtering// Proceeding of the 5th International Conference on Information Systems Analysis and Synthesis, 1999.
 - [26] Li Y F, Zhang C Q, Swanb J R. An information filtering on the Web and its application in JobAgent. Knowledge-based Systems, 2000, 13: 285~296.
 - [27] Lingras P, Chen M, Miao D Q. Rough multi-category decision theoretic framework// Proceedings of the 3rd International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2008, 2008, LNCS (LNAI) 5009: 676~683.
 - [28] Lingras P, Chen M, Miao D Q. Semi-supervised rough cost/benefit decisions. Fundamenta Informaticae, 2009, 94: 233~244.
 - [29] Lingras P, Chen M, Miao D Q. Rough cluster quality index based on decision theory. IEEE Transaction on Knowledge and data engineering, 2009, 21: 1014~1026.
 - [30] Liu D, Li H X, Zhou X Z. Two decades' research on decision-theoretic rough sets// Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Cognitive Informatics, 2010.
 - [31] Liu D, Li T R, Li H X. A multiple-category classification approach with decision-theoretic rough sets. Fundamenta Informaticae, 2012, 115: 173~188.
 - [32] Liu D, Li T R, Liang D C. A new discriminant analysis approach under decision-theoretic rough sets// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011, 2011, LNCS (LNAI) 6954: 476~485.
 - [33] Liu D, Li T R, Liang D C. Decision-theoretic rough sets with probabilistic distribution// Proceedings of the 8th international RSCTC conference, 2012.
 - [34] Liu D, Li T R, Ruan D. Probabilistic model criteria with decision-theoretic rough sets. Information Sciences, 2011, 181: 3709~3722.
 - [35] Liu D, Yao Y Y, Li T R. Three-way investment decisions with decision-theoretic rough sets. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2011, 4: 66~74.
 - [36] Liu J B, Min F, Liao S J, Zhu W. Minimal test cost feature selection with positive region constraint// Proceedings of the 8th international RSCTC conference, 2012.
 - [37] Ma X A, Wang G Y, Yu H. Multiple-category attribute reduct using decision-theoretic rough set model// Proceedings of the 8th international RSCTC conference, 2012.
 - [38] Yang X P, Song H G, Li T J. Decision making in incomplete information system based on decision-theoretic rough sets// Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011, 2011, LNCS (LNAI) 6954: 495~503.
 - [39] Yang X P, Yao J T. Modelling multi-agent three-way decisions with decision theoretic rough sets. Fundamenta Informaticae, 2012, 115: 157~171.
 - [40] Yu H, Chu S S, Yang D C. Autonomous knowledge-oriented clustering using

- decision-theoretic rough set theory. *Fundamenta Informaticae*, 2012, 115: 141~156.
- [41] Yu H, Liu Z G, Wang G Y. Automatically determining the number of clusters using decision-theoretic rough set// *Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011*, 2011, LNCS (LNAI) 6954: 504~513.
 - [42] Yu H, Wang Y. Three-way decisions method for overlapping clustering// *Proceedings of the 8th international RSCTC conference*, 2012.
 - [43] Zhou B. A new formulation of multi-category decision-theoretic rough sets// *Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2011*, 2011, LNCS (LNAI) 6954: 514~522.
 - [44] Zhou B, Yao Y Y, Luo J G. A three-way decision approach to email spam filtering// *Proceedings of the 23rd Canadian conference on Advances in Artificial Intelligence, AI2010*, 2010, LNCS (LNAI) 6085: 28~39.
 - [45] Zhou X Z, Li H X. A multi-view decision model based on decision-theoretic rough set// *Proceedings of the 4th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2009*, 2009, LNCS (LNAI) 5589: 650~657.
 - [46] Yao Y Y, Deng X F. Sequential three-way decisions with probabilistic rough sets// *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Cognitive Informatics & Cognitive Computing*, 2011.
 - [47] 贾修一, 李伟漳, 商琳, 陈家骏. 一种自适应求三枝决策中决策阈值的算法. *电子学报*, 2011, 39: 2520~2525.
 - [48] 贾修一, 商琳. 一种求三支决策阈值的模拟退火算法, 2012, 手稿.
 - [49] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 李德玉. *粗糙集理论与方法*. 北京: 科学出版社, 2001.
 - [50] Chan A, Gilon D, Manor O, Paltiel O. Probabilistic reasoning and clinical decision-making: Do doctors overestimate diagnostic probabilities? *QJM: An International Journal of Medicine*, 2003, 96: 763~769.
 - [51] Lurie J D, Sox H C. *Principles of medical decision making*. Spine, 1999, 24: 493~498.
 - [52] Pauker S G, Kassirer J P. The threshold approach to clinical decision making. *The New England Journal of Medicine*, 1980, 302: 1109~1117.
 - [53] Schechter C B. Sequential analysis in a Bayesian model of diastolic blood pressure measurement. *Medical Decision Making*, 1988, 8: 191~196.
 - [54] van der Gaag L C, Coupe V M H. Sensitive analysis for threshold decision making with Bayesian belief networks// Lamma E and Mello P (Eds.) *AI*IA 99: Advances in Artificial Intelligence*, 2000, LNCS (LNAI) 1792: 37~48.
 - [55] Sherif M, Hovland C I. *Social Judgment: Assimilation and Contrast Effects in Communication and Attitude Change*. New Haven: Yale University Press, 1961.
 - [56] Wald A. Sequential tests of statistical hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1945,

- 16: 117~186.
- [57] Forster M R. Key concepts in model selection performance and generalizability. *Journal of Mathematical Psychology*, 2000, 44: 205~231.
 - [58] Goudey R. Do statistical inferences allowing three alternative decisions give better feedback for environmentally precautionary decision-making? *Journal of Environmental Management*, 2007, 85: 338~344.
 - [59] Matthews L R, Bennett P G. The art of course planning: Soft O.R. in action. *The Journal of the Operational Research Society*, 1986, 37: 579~590.
 - [60] Woodward P W, Naylor J C. An application of Bayesian methods in SPC. *The Statistician*, 1993, 42: 461~469.
 - [61] Weller A C. Editorial Peer Review: Its Strengths and Weaknesses. Medford, NJ: Information Today, Inc., 2001.
 - [62] French S. *Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality*. New York: Halsted Press, 1988.
 - [63] Savage L J. *The Foundations of Statistics*. New York: Dover Publications, 1972.
 - [64] Jassem W. On the distributional analysis of pitch phenomena. *Language and speech*, 1978, 21: 362~372.
 - [65] Siegel L J, Bessey A C. Voiced/unvoiced/mixed Excitation classification of speech. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1982, ASSP-30: 451~460.
 - [66] Slezak D, Wroblewski J, Eastwood V, Synak P. Brighthouse: an analytic data warehouse for ad-hoc queries// *Proceedings of the VLDB Endowment*, 2008, 1: 1337~1345.
 - [67] Kraaij W, Raaijmakers S, Elzinga P. Maximizing classifier yield for a given accuracy// *Proceedings of the 20th Belgian-Netherlands Conference on Artificial Intelligence, BNAIC 2008*, 2008.
 - [68] Lange R. An empirical test of the weighted effect approach to generalized prediction using recursive neural nets// Simoudis E, Han J, Fayyad U// *Proceedings of the 2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. Menlo Park: AAAI Press, 1996, 183~188.
 - [69] Voorhees E M. Contradictions and justifications: extensions to the textual entailment task// *Proceedings of ACL, the Association for Computer Linguistics*, 2008, 63~71.
 - [70] Greco S, Slowinski R, Yao Y Y. Bayesian decision theory for dominance-based rough set approach// *Proceedings of the 2nd International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2007*, 2007.
 - [71] 赵文清, 朱永利, 高伟. 一个基于决策粗糙集理论的信息过滤模型. *计算机工程与应用*, 2007, 43: 185~187.
 - [72] Ma W M, Sun B Z. On relationship between probabilistic rough set and Bayesian risk decision

- over two universes. *International Journal of General Systems*, 2012, 41: 225~245.
- [73] 胡卉颖, 罗锦坤, 刘阿宁. 三枝决策粗糙集模型属性约简研究. *软件导刊*, 2012, 11: 20~22.
- [74] 贾修一, 商琳. 基于决策风险最小化的属性约简// 李华雄, 周献中, 李天瑞, 王国胤, 苗夺谦, 姚一豫. 决策粗糙集理论及其研究进展. 北京:科学出版社, 2011.
- [75] 贾修一, 商琳, 陈家骏. 基于三支决策的属性约简// 中国人工智能进展, 2009: 193~198.
- [76] 贾修一, 商琳, 陈家骏. 决策分先最小化属性约简. *计算机科学与探索*, 2011, 5: 155~160.
- [77] 李华雄, 刘盾, 周献中. 决策粗糙集模型研究综述. *重庆邮电大学学报: 自然科学版*, 2012, 22: 624~630.
- [78] 李华雄, 周献中. 决策粗糙集理论方法研究综述// 李华雄, 周献中, 李天瑞, 王国胤, 苗夺谦, 姚一豫. 决策粗糙集理论及其研究进展. 北京:科学出版社, 2011.
- [79] 李华雄, 周献中, 赵佳宝. 决策粗糙集的正域约简// 李华雄, 周献中, 李天瑞, 王国胤, 苗夺谦, 姚一豫. 决策粗糙集理论及其研究进展. 北京:科学出版社, 2011.
- [80] 刘盾, 李天瑞. 三枝决策粗糙集// 李华雄, 周献中, 李天瑞, 王国胤, 苗夺谦, 姚一豫. 决策粗糙集理论及其研究进展. 北京:科学出版社, 2011.
- [81] 刘盾, 姚一豫, 李天瑞. 三枝决策粗糙集. *计算机科学*, 2011, 38: 245~250.
- [82] 苗夺谦, 李文, 周杰. 基于决策粗糙集模型的文本分类研究// 李华雄, 周献中, 李天瑞, 王国胤, 苗夺谦, 姚一豫. 决策粗糙集理论及其研究进展. 北京:科学出版社, 2011.
- [83] 杨晓平, 姚静涛. 多用户决策粗糙集模型// 李华雄, 周献中, 李天瑞, 王国胤, 苗夺谦, 姚一豫. 决策粗糙集理论及其研究进展. 北京:科学出版社, 2011.
- [84] 于洪, 储双双. 一种基于决策粗糙集的自动聚类方法. *计算机科学*, 2011, 38: 221~224.
- [85] 于洪, 王国胤. 基于决策粗糙集的自动聚类方法// 李华雄, 周献中, 李天瑞, 王国胤, 苗夺谦, 姚一豫. 决策粗糙集理论及其研究进展. 北京:科学出版社, 2011.
- [86] Deng X F, Yao, Y.Y., An information-theoretic interpretation of thresholds in probabilistic rough sets// *Proceedings of the 8th international RSCTC conference*, 2012.
- [87] Yao Y Y, Zhou B. Naive Bayesian rough sets// *Proceedings of the 5th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT 2010, LNCS (LNAI) 6401*: 713~720.